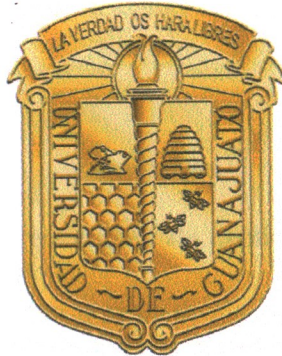


Universidad de Guanajuato



División de Ciencias e Ingenierías
Campus León

**Formación de estructura del universo
temprano a través de un modelo de materia
oscura de campo escalar.**

Tesis que presenta

Ing. Antonio Herrera Martín

Para obtener el grado de
MAESTRO EN FÍSICA

Asesor de Tesis
Dr. Luis Arturo Ureña López

· Noviembre 2012 ·

Resumen

La cosmología actual se ha encargado de explicar como el universo ha evolucionado en el tiempo. Postula la existencia de un Principio Cosmológico, el cual predice que el universo a gran escala es homogéneo e isótropo. Sin embargo, en la vida diaria, si se observa al cielo, es posible ver regiones más densas que otras. Para intentar explicar esta aparente contradicción se considera la existencia de pequeñas perturbaciones al comienzo del universo que evolucionan para formar objetos que están ligados a través de la gravedad, a los cuales se les llama estructuras. La forma convencional de trabajar estos modelos es por medio de materia oscura.

Anteriormente se han realizado trabajos donde se utiliza un campo escalar para representar las componentes de materia oscura. Estos trabajos se han realizado tomando aproximaciones semi-analíticas hasta el orden lineal, por lo que es cuestionable su validez. En este trabajo se utiliza una versión modificada del código numérico HLattice, el cual permite evolucionar campos escalares interactuantes e incluir perturbaciones en la métrica, para reproducir cualitativamente los resultados semi-analíticos durante el orden lineal, sin considerar aproximaciones. Se encuentra que un campo escalar, de manera cualitativa, exhibe un comportamiento de materia oscura, evolucionando de forma tal que desarrolle estructura.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Descripción del trabajo	3
2. Relatividad y Cosmología Estándar	5
2.1. Relatividad General	5
2.1.1. Postulados	5
2.1.2. El principio de equivalencia	6
2.1.3. Curvatura	7
2.1.4. Ecuaciones de Campo de Einstein	8
2.2. Cosmología estándar	9
2.2.1. Homogeneidad e isotropía	9
2.2.2. Métrica Robertson-Walker	11
2.2.3. Ley de Hubble	11
2.2.4. Métrica FRW	12
2.3. Las ecuaciones de Friedmann	13
2.4. Composición del universo	14
2.5. Modelo λ CDM	15
2.6. La breve historia del universo	17
2.6.1. El Big Bang	17
2.6.2. Inflación	17
2.6.3. Radiación del fondo cósmico de microondas	18
2.6.4. El universo temprano	18
3. Materia Oscura	21
3.1. Materia visible	21
3.2. Los tipos de materia oscura	22
3.2.1. Hot Dark Matter o materia oscura caliente	22
3.2.2. Cold Dark Matter o Materia oscura fría	23

3.3.	Formación de Estructura	24
3.3.1.	Definiciones básicas	24
3.3.2.	Modelo esférico de inestabilidad gravitacional	26
3.4.	Evolución de las inhomogeneidades	28
3.4.1.	Análisis Newtoniano	29
3.5.	Inestabilidad Gravitacional en el caso relativista	34
3.5.1.	Evolución fuera del horizonte	35
3.5.2.	Materia oscura fría	37
4.	Campos escalares	41
4.1.	La acción y el Lagrangiano	41
4.2.	Campo escalar en espacio-tiempo plano	42
4.2.1.	El lagrangiano	42
4.2.2.	Ecuación del campo	43
4.2.3.	El campo escalar cuasi-libre	43
4.3.	Campo en un espacio curvo	44
4.4.	Gravedad a partir del principio de mínima acción	45
4.5.	Tensor de Energía momento para el campo escalar	45
4.6.	Campo escalar como materia oscura	46
4.7.	Oscilaciones de un campo escalar en un universo en expansión	47
4.7.1.	Evolución de la densidad de energía	48
4.8.	Perturbaciones escalares	50
5.	Métodos Numéricos	55
5.1.	Aproximaciones en diferencias finitas	55
5.2.	Discretización de las ecuaciones de movimiento	56
5.3.	HLattice	57
5.3.1.	Perturbación de la métrica	58
5.3.2.	Integrador híbrido Simpléctico-Runge Kutta	62
6.	Resultados numéricos para un campo escalar de materia oscura	67
6.1.	Definiciones	67
6.2.	Condiciones iniciales	70
6.3.	Fondo Homogéneo	72
6.4.	Perturbaciones	74

7. Conclusiones	89
7.1. Perspectivas	91

Índice de figuras

1.1. El pastel cosmológico con los componentes principales del universo que se consideran según el modelo estándar de la cosmología. En éste se observa que la materia tradicional es una mínima fracción del contenido total del universo, mientras que el resto de contenido de nuestro universo es debido a otro tipo de materia que hasta el momento no se comprende completamente.	2
1.2. Izquierda.- Una vista de una rebanada 3-dimensional del universo observado a más de 500Mpc, donde se ve que la región es homogénea e isotrópica. Derecha.- Una ampliación hasta 31.25Mpc donde ya no se puede apreciar homogeneidad y se ve claramente como hay áreas con grumos y diferentes agrupaciones.	2
2.1. El mapa de la Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) de temperaturas del fondo cósmico de microondas, las áreas en rojo indican zonas mas cálidas y las azules mas frías. Las fluctuaciones del fondo cósmico de microondas son extremadamente tenues (una parte por 100,000) comparado con el promedio de temperatura del campo de 2.73K	10
2.2. Representación de la superficie dos-dimensional de una esfera en expansión, mostrando que el ángulo entre los puntos A y B se mantiene constante sin importar cuanto se incremente el radio de la esfera.	11
2.3. Esquema que ejemplifica la época de inflación durante la cual el universo experimento una expansión acelerada en un intervalo de tiempo muy corto, lo que ocasiono un drástico decaimiento en la densidad.	18

2.4. Arriba: fluctuaciones de temperaturas como fueron medidas por el COBE. Abajo: fluctuaciones de temperatura después de sustraer el dipolo debido al movimiento del satélite.	19
3.1. Esfera de radio $R(t)$ expandiendo o contrayéndose bajo la influencia de una fluctuación de la densidad $\delta(t)$. Que caracteriza el ejemplo más simple de colapso, debido al exceso de materia en una región determinada.	27
5.1. Discretización del espacio-tiempo en diferencias finitas en una dimensión, donde cada uno de los valores continuos que posee el espacio son traducidos en puntos finitos, que se pueden incrementar hasta hacer una buena aproximación a su equivalente en el espacio-tiempo continuo.	56
6.1. Promedio espacial del campo, el cual inicia un poco antes de cumplir la relación (6.21). Cuando llega a ese limite el campo comienza a realizar su oscilación y se puede decir que el promedio comienza a comportarse como materia oscura. Por ejemplo la evolución de su densidad de energía.	73
6.2. El cambio de la densidad de energía con respecto al factor de escala, al inicio cuando el campo no ha comenzado su oscilación el decremento no es totalmente el adecuado, posterior a esto inicia el decremento como un universo dominado por materia, $\rho \sim a^{-3}$. Incluyendo la curva a la cual se ajusta.	74
6.3. El promedio de la energía cinética normalizado con la densidad de energía total, que durante la evolución del campo se encuentra oscilando y nunca llega completamente a 1 pero en puntos es la energía dominante como debe de suceder.	75
6.4. El promedio de la energía potencial normalizado con la densidad de energía total, donde al estar normalizado se puede ver por que alrededor de una oscilación esta es la energía que permite caracterizar el máximo, que en la ecuación (4.37) es un requisito para ser valida.	75

6.5. El promedio del gradiente de energía normalizado con la densidad de energía total, que en los tratamientos tradicionales es considerado cero sin embargo gracias a que este no es así permite que el campo pueda interactuar por las perturbaciones ya que si este fuera cero se recuperaría un fondo homogéneo para el campo.	76
6.6. Promedio de la perturbación, $\delta\phi$, donde se observa que posee una oscilación, pero después de un tiempo su amplitud es pequeña. Sin embargo no alcanza llegar completamente a cero, como se puede ver gracias al desarrollo que lleva a la ecuación (6.22).	77
6.7. Evolución en el tiempo de δ_{rms} y de h_{rms} , donde se tiene que $\delta \sim a(t)$. El comportamiento puede descomponerse en distintos modos en el espacio de Fourier, donde en un principio no todos cumplen con la relación (6.23), afectando durante el principio de la evolución.	78
6.8. La razón entre δ y h dice que debería seguir una relación de 2, sin embargo esto no es así, aunque conforme avanza la evolución se ve la tendencia hacia ese valor.	78
6.9. Evolución de los modos $k/H = 0.4178879$, que corresponde al más infrarojos de δ_k y h_k , se puede observar como estos evolucionan con una relación constante después de que ambos se han estabilizado, ya que el programa tiene un corte dependiendo el tamaño de la caja, si es demasiado grande arruina los modos infrarojos, generando los picos en la evolución que no están presentes en los modos superiores.	80
6.10. La evolución de un modo $k/H = 5.445427$ que en un principio no cumplía la relación establecida para comportarse como materia oscura, conforme va evolucionando entra al régimen $k/a \ll m$, las perturbaciones comienzan a crecer y en un tiempo posterior de evolución al presentado crecerán con una relación $ \delta = h /2$. Aquí se puede ver que a diferencia del modo más infrarojo no posee el corte y no se aprecia el pico que es prominente en h_k	80

- 6.11. El modo mas al ultravioleta ($k/H = 10.0530965$), que es el que más tarda en comenzar a crecer, aquí se aprecia cómo es que las perturbaciones demasiado pequeñas no crecen, hasta que su longitud de onda $\lambda_{phys} = 2\pi a/k$ es suficientemente grande, lo que permite la evolución del contraste de densidad. 81
- 6.12. Comparación entre la evolución de distintos modos de δ_k , donde se ve mas claro como es que los modos superiores oscilan en una época temprana y posteriormente crecen. 82
- 6.13. Comparación entre la evolución de distintos modos de $h_{k.}$, donde el comportamiento de los modos superiores no son propiamente los de a , en tiempos tempranos ya que antes de esto el comportamiento como materia oscura no esta garantizado, sin embargo estos crecen y debido a los modos ultravioletas es que los valores rms, no es al principio de la evolución como se espera. 82
- 6.14. Izquierda.-Se presenta la evolución temporal de todos los modos en un rango entre ($k/H = 0.4178879$) y ($k/H = 10.0530965$). En color rojo se tienen distintos tiempos entre $a(t) = 1$ y $a(t) = 14$, la primera linea de abajo hacia arriba es $a(t) = 1$, en la que se observa que todos los modos poseen un valor similar. Conforme prosigue la evolución esto cambia y se tiene una preferencia de crecer en los valores medios y bajos de k . EL color verde es para distintos tiempos entre $a(t) = 15$ y $a(t) = 50$ y el azul para los que se encuentran entre $a(t) = 51$ y $a(t) = 152$. El color violeta es para todo tiempo de evolución superior a $a(t) = 152$. Derecha.- La gráfica para el mismo caso de un campo escalar representando materia oscura, utilizando los resultados semi-analíticos [16]. Las lineas corresponden a un valor de $a(t) \approx 200$, para λ CDM (linea negra) y para ϕ CDM con masas de $\lambda = 5$ (linea roja) y $\lambda = 10$ (linea azul) siendo de $m_\phi^2 = \lambda^2 8\pi G V_0$ y $V_0 \approx (36.5\text{eV})^4$. Se presenta con el propósito de hacer una comparación cualitativa de la forma que posee el espectro a distintos modos, viendo que tiene a crecer para formar un pico en valores medios de k 83

6.15. El espectro para distintos tiempos de h_k , que poseen una forma similar a la de δ_k , en la evolución temporal, donde se pueden observar que para valores de k pequeña se tiene un corte indicado por el pico de abajo hacia arriba. Cuando avanza al evolución obtiene la misma forma que δ_k 83

6.16. Condición inicial de la perturbación $\delta\phi$, en este caso se tienen omitido el valor medio ya que es mucho mayor que las perturbaciones, pero se puede ver que la densidad alrededor del campo es muy tenue. 84

6.17. La perturbación $\delta\phi$ cuando la evolución se encuentra al factor de escala $a(t) = 285.2$, estas se pueden observar como incrementan alrededor de la malla por lo que ahí se puede observar incremento de densidad del campo. 85

6.18. El contraste de densidad tridimensional cuando el factor de escala es $a(t) = 1$, donde se observa que es homogéneo, al inicio entonces en un tiempo temprano del campo, que en este caso representa las condiciones que se desean al inicio, como se presentan para el universo en el principio cosmológico. . . . 85

6.19. Izquierda.- Evolución del $\delta(\vec{x})$ cuando se encuentra a $a(t) = 203.77$, se observa como hay un incremento en las sobredensidades alrededor de la red, y una concentración lo que en estas regiones indica un incremento de la forma como el modelo esférico. Derecha.- El contraste de densidad cuando su evolución se encuentra en $a(t) = 1514$, observando regiones sobre densas muy localizadas, que si se hace una analogía al modelo de colapso esférico estas regiones, que ya son sobredensas que alcanzan a ligarse gravitacionalmente lo que en el futuro formara las galaxias. 86

6.20. Evolución de izquierda a derecha $a(t) = 11.892$, $a(t) = 16.386$, $a(t) = 27.033$, $a(t) = 54.685$, $a(t) = 90.935$, $a(t) = 203$ se puede ver como el incremento de regiones de una mayor concentración de la densidad. 87

6.21. Evolución de izquierda a derecha $a(t) = 988.7$, $a(t) = 1514$, $a(t) = 1562.8$, $a(t) = 1595.8$, $a(t) = 1612.4$, $a(t) = 1629.1$. Lo que antes podía verse como pequeñas regiones ahora se puede observar regiones conectadas que se intensifican y muy bien identificadas que van representando lugares de formación de estructura.. . . . 88

Índice de cuadros

2.1. Relación del parámetro de densidad Ω , dependiendo del valor de la k de curvatura. Donde esto permite identificar o escribir una relación para el tipo de espacio que posee el universo, con lo que es posible predecir de igual como afecta a la expansión de este o el posible caso contrario.	14
2.2. Evolución de las densidades de energía más comunes. Estas representan las consideraciones de materia mas sencilla, donde cada una o su combinación, se considera que son el contenido total del universo.	15
2.3. Propiedades del modelo Λ CDM [24]. Donde se describen de igual forma las diferentes épocas en las que dominaron los distintos componentes que conforman el universo.	16

Capítulo 1

Introducción

El hombre siempre ha tenido curiosidad sobre su entorno. En nuestros días los avances tecnológicos han permitido la mejora de las técnicas para estudiar el universo, que por miles de años solo pudo ser observado a través de los ojos, ya sea directamente o ayudado de algún instrumento. Si se considera lo que se ha aceptado como estándar en la cosmología se tiene que el universo está descrito por medio de un pastel cosmológico (figura 1.1), donde la mayor parte del universo está compuesto por energía oscura, ocupando ésta un 72 % del contenido material, la materia oscura un 23 %, y la materia ordinaria un 5 %.

Si el Principio Cosmológico estuviera presente a todas las escalas, el espacio que nos rodea se vería muy diferente, ya que diariamente se puede observar como hay una gran falta de homogeneidad e isotropía, necesaria para nuestra propia existencia. Esto se debe a que existen distintas distribuciones de materia, llamadas estructuras. Éstas están conformadas por planetas, sistemas solares, galaxias, etc. La falta de homogeneidad e isotropía se observa a escalas menores de 3.085×10^{22} m.

La simulación es una herramienta actual muy usada. En la cosmología la simulación más conocida es “La Simulación del Milenio”, donde se puede observar como en un universo homogéneo e isótropo, se van reuniendo regiones donde se pueden formar lo que hoy son galaxias y cúmulos de galaxias.(figura 1.2)

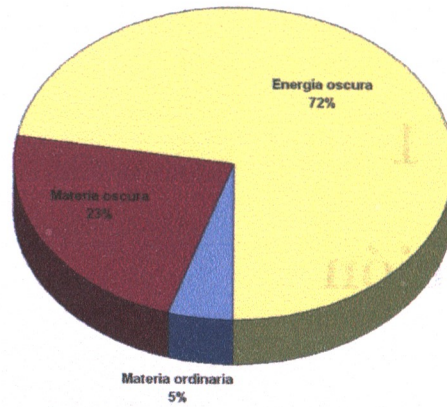


Figura 1.1: El pastel cosmológico con los componentes principales del universo que se consideran según el modelo estándar de la cosmología. En éste se observa que la materia tradicional es una mínima fracción del contenido total del universo, mientras que el resto de contenido de nuestro universo es debido a otro tipo de materia que hasta el momento no se comprende completamente.

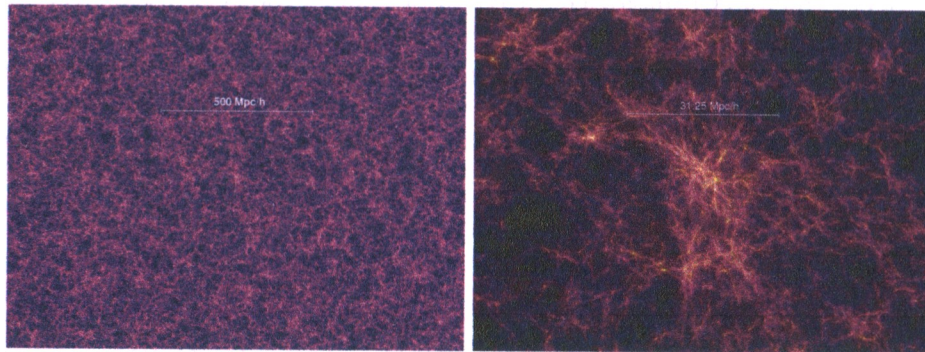


Figura 1.2: Izquierda.- Una vista de una rebanada 3-dimensional del universo observado a más de 500Mpc, donde se ve que la región es homogénea e isotrópica. Derecha.- Una ampliación hasta 31.25Mpc donde ya no se puede apreciar homogeneidad y se ve claramente como hay áreas con grumos y diferentes agrupaciones.

1.1. Descripción del trabajo

En el capítulo 2 se aborda un breve resumen de Relatividad General, las bases de la cosmología actual y las propiedades del modelo Λ CDM. Detalles de la importancia del Principio Cosmológico y un resumen de las diferentes etapas que el universo atravesó, antes de llegar a la formación de las estructuras.

En el capítulo 3 se hace una revisión de la materia oscura y sus propiedades más generales y de como es el agente que permite el crecimiento de desviaciones a la homogeneidad. Lo cual permite que estructuras aparezcan en el universo. Todo el análisis es realizado considerando el régimen lineal. En el capítulo 4, se hace una revisión de la teoría de un campo escalar y la descripción de los trabajos realizados, donde se utiliza para describir materia oscura. Se reproducen los resultados que se obtienen en el modelo Λ CDM para la formación de estructura, indicando las condiciones y aproximaciones utilizadas.

En el capítulo 5 y 6 se presenta una alternativa a través de simulaciones para evolucionar un campo escalar. Se utiliza el código HLattice, al cual se le hacen las modificaciones adecuadas para que un campo escalar, represente la materia oscura sin tomar aproximaciones durante el desarrollo de las soluciones. El comportamiento que exhibe durante la evolución, cualitativamente reproduce los resultados semi-analíticos presentados en otros trabajos, igualmente coincide para el comportamiento que permite la formación de estructura.

Capítulo 2

Relatividad y Cosmología Estándar

La cosmología actual, descansa ampliamente en en la teoría de la Relatividad General, la cual describe como el campo gravitatorio es en realidad una curvatura del espacio-tiempo. En esta se detalla como el espacio-tiempo le dice a la materia como debe comportarse dentro de el y al mismo tiempo, la materia le dice al espacio-tiempo como se debe de curvar. Actualmente el modelo principal de la cosmología es Λ CDM. A continuación se presenta un resumen las propiedades básicas y las distintas etapas que el universo ha atravesado en su historia.

2.1. Relatividad General

2.1.1. Postulados

La Relatividad General es una teoría relativista de la gravedad y el espacio donde se trabaja es ahora un espacio curvo, donde se encuentra presente un campo gravitatorio que corresponde a la curvatura de la geometría del espacio-tiempo. El primer comentario es que en relatividad general el tensor de energía momento es de suma importancia. Si se hace analogía con la teoría de Newton este tenía como fuente del campo la densidad ρ , esta es la densidad de la masa, sin embargo si este fuera el caso cuando es relativista esto rompería la invarianza, por lo que se tiene que para la relatividad de Einstein se tiene que las fuentes del campo es todo el tensor de energía-

momento.

Las características esenciales de la teoría de la relatividad general son las siguientes:

- Las leyes de la física deben tomar la misma forma matemática en todos los sistemas de coordenadas.
- Las partículas que se mueven en caída libre siguen geodésicas del espacio-tiempo.
- El principio de equivalencia o de invariancia local de Lorentz: las leyes de la relatividad especial (espacio plano de Minkowski) se aplican localmente para todos los observadores inerciales.

El espacio-tiempo (todo el conjunto de eventos) es una variedad 4-dimensional con una métrica

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.1)$$

2.1.2. El principio de equivalencia

Una importante propiedad de un marco inercial es que toda partícula en reposo, se mantiene en reposo si ninguna fuerza actúa sobre ella. Sin embargo en un intento para definir un marco de referencia en la tierra no es fácilmente posible, ya que no hay partícula que este libre del efecto de la gravedad. Sin embargo existen un marco en el cual las partículas mantienen una velocidad uniforme. Este marco es uno que cae libremente en un campo gravitacional a una pequeña distancia, ya que en este marco las partículas aceleran de la misma forma entre ellas, por lo que el movimiento relativo que presentan es similar al caso de relatividad especial o un espacio sin gravedad. Si se presenta esto a una distancia considerable por ejemplo 2 cuerpos separados por la misma distancia de la tierra y venus, la presencia de estos marcos inerciales no es posible ya que el efecto de la gravedad es fuertemente visible. Por lo que es importante remarcar que el principio es valido en un marco local. Einstein construyó la relatividad general tomando en cuenta que estos marcos locales se comportaban como inerciales. El argumento de que los marcos de caída libre, son marcos inerciales se puede presentar también de forma inversa. Si se tiene un cohete que esta en un espacio libre de gravedad, si acelera de forma uniforme desde el punto de vista del observador interno,

es como existiera un campo gravitacional dentro del cohete ya que los objetos que se lancen dentro del cohete serán acelerados como si fueran atraídos por un campo gravitacional independientemente de su composición interna. Se ve que entonces campos gravitacionales uniformes son equivalentes a marcos que aceleran uniformemente de marcos inerciales, dentro de un marco local. Este es el principio de equivalencia entre la gravedad y la aceleración y es la piedra angular de la teoría de Einstein.

2.1.3. Curvatura

Tensor de Curvatura de Riemann

A diferencia de un espacio plano es necesario una forma de describir la curvatura a través de un tensor. En términos de los símbolos de Christoffel está dado por

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} = -\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\kappa} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}. \quad (2.2)$$

En su versión totalmente covariante es

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\beta\lambda}R^{\beta}_{\mu\nu\kappa}, \quad (2.3)$$

y en términos de los símbolos de Christoffel y del tensor métrico, el tensor de curvatura queda

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\kappa\lambda} + g_{\kappa\lambda,\mu\nu} - g_{\lambda\nu,\kappa\mu} - g_{\kappa\mu,\lambda\nu}) + g_{\rho\sigma}[\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\kappa\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\Gamma^{\sigma}_{\kappa\mu}]. \quad (2.4)$$

A partir de esta expresión, las siguientes propiedades del tensor de curvatura son evidentes

- Simetría

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}. \quad (2.5)$$

- Antisimetría

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa}R_{\mu\lambda\kappa\nu}. \quad (2.6)$$

- Relación Cíclica

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0. \quad (2.7)$$

Tensor de Ricci y el Escalar de Ricci

El tensor simétrico $R_{\mu\kappa} = R_{\kappa\mu}$, que es la contracción

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}, \quad (2.8)$$

se le llama Tensor de Ricci, y es esencialmente el único tensor de segundo rango que puede construirse a partir de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$. Finalmente, el escalar de curvatura

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}, \quad (2.9)$$

es también el único escalar que puede formarse con el tensor de curvatura.

2.1.4. Ecuaciones de Campo de Einstein

El marco teórico de relatividad general fue esbozado en la sección anterior, entonces hay que describir al campo gravitatorio en función de la curvatura del espacio-tiempo. El análogo Newtoniano para esto es

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho, \quad (2.10)$$

donde ρ es la densidad de masa. Cuya solución para una partícula de masa puntual m es

$$\phi = -\frac{Gm}{r}. \quad (2.11)$$

De acuerdo a la teoría de Einstein, es necesario postular que configuración de la geometría espacio-temporal esta asociada a una determinada configuración de la materia. La fuente de la gravedad en el espacio es el tensor de energía momento. Este determina la métrica a través de la ecuación de campo

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

Si se incluyen también los términos lineales en la métrica y sus primeras derivadas, las ecuaciones de campo de Einstein admiten un término de la forma $\Delta g_{\mu\nu}$,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

donde Λ se denomina constante cosmológica. La materia es incorporada a las ecuaciones a través del tensor de energía-momento, T_{β}^{α} . El tensor es simétrico,

$$T^{\alpha\beta} \equiv g^{\beta\delta} T_{\delta}^{\alpha} = T^{\beta\alpha}, \quad (2.14)$$

y es determinado que la condición que cumplen las ecuaciones

$$\partial T^{\alpha\beta} / \partial x^\beta = 0, \quad (2.15)$$

deben coincidir con las ecuaciones de movimiento de la materia en un espacio tiempo de Minkowski. Modificando las ecuaciones de movimiento para espacio curvo:

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} \equiv \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha T^{\gamma\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\beta T^{\alpha\gamma} = 0, \quad (2.16)$$

donde los términos proporcionales a Γ toman en cuenta al campo gravitacional. El tensor de energía-momento de un fluido perfecto es

$$T^\alpha_\beta = (\rho + p)u^\alpha u_\beta - p\delta^\alpha_\beta, \quad (2.17)$$

donde las propiedades de la ecuación de estado $p = p(\rho)$ depende de las propiedades de la materia y deben ser especificadas. Si el lector desea consultar más a fondo puede consultar las referencias [25]

2.2. Cosmología estándar

2.2.1. Homogeneidad e isotropía

El punto de partida para la cosmología moderna, que describe al universo a través del modelo del Big Bang, es el Principio Cosmológico. Este enuncia que a grandes escalas el universo es homogéneo e isotrópico. Este principio, se presentó originalmente como una propiedad intuitiva, que permitió reducir de forma substancial el análisis matemático. La homogeneidad del universo que enuncia el Principio Cosmológico, es curiosa ya que es sólo posible de observar a escalas cosmológicas, que son distancias mayores a los 100Mpc ($1 \text{ Mpc} \simeq 3.08 \times 10^{22} \text{ m}$) [8, 18, 24]. Abajo de estas escalas el universo presenta una gran inhomogeneidad debido a la existencia de galaxias, clusters de galaxias o superclusters. Sin embargo esto no es todo, ya que esta homogeneidad es apreciada sólo hasta la máxima distancia que actualmente es posible observar y no necesariamente todo el resto del universo cumpla con la misma propiedad, que podría ser a distancias superiores de 3000Mpc. La suposición del Principio Cosmológico viene desde el tiempo del trabajo de Einstein, sin embargo hoy en día se tiene fuertes pruebas de que las propiedades que describes están presentes. La mejor evidencia que se tiene esta dada por el fondo

cósmico de microondas o CMBR(por las siglas en ingles de Cosmic Microwave Background Radiation), donde se puede observar la uniformidad de la temperatura de los fotos que llegan de todas partes del universo que han viajado desde épocas muy tempranas que se puede observar en la Fig. 2.1. Si la homogeneidad y la isotropía no estuvieran presentes esto se observaría en las diferencias de temperatura, ya que se tendría anisotropías de gran tamaño al igual que es sensible para las inhomogeneidades presentes.

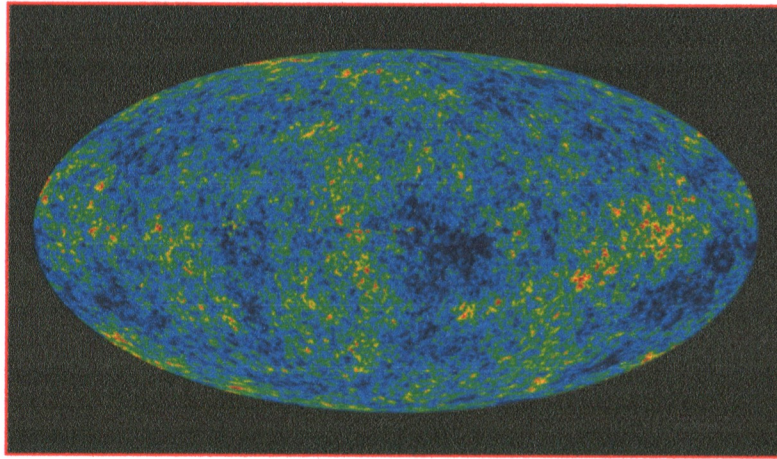


Figura 2.1: El mapa de la Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) de temperaturas del fondo cósmico de microondas, las áreas en rojo indican zonas más cálidas y las azules más frías. Las fluctuaciones del fondo cósmico de microondas son extremadamente tenues (una parte por 100,000) comparado con el promedio de temperatura del campo de $2.73K$.

La gran uniformidad que posee el CMBR, muestra que en la época de la última dispersión, alrededor de 200,000 años después del Big Bang, el universo poseía una gran precisión en la isotropía e homogeneidad. Si a estas escalas y épocas se presenta una gran uniformidad del universo, surge la pregunta de que sucede a regiones menores que se presentan las anisotropías o si más allá del universo visible esta se conserva, ¿que porción de todo el universo es igual al nuestro?. Sin entrar en especulación lo que se puede afirmar utilizando las evidencias que se observan, es que el universo es homogéneo e isotropico a escalas mayores de 100Mpc y tiene muy bien desarrolladas estructuras por debajo de este rango, el universo se expande según la ley de Hubble y gracias al CMBR, se tiene las pequeñas fluctuaciones en la distribución de densidad de energía del universo, cuando este sólo tenía unos miles

de años es decir 10^{-5} . [8–10, 18, 19, 24]

2.2.2. Métrica Robertson-Walker

Como se discutió en la sección anterior, la distribución del universo es homogénea e isotrópica a grandes escalas, todo esto proviene del hecho de que el universo proviene del modelo de Big Bang caliente, que sugiere que todo inicio con una gran explosión hace aproximadamente 13 mil millones de años provocando una distribución homogénea e uniforme en un universo que se expande y se enfría desde entonces.

2.2.3. Ley de Hubble

Si consideramos un universo en expansión que es homogéneo e isotrópico, las velocidades relativas obedecen la ley de Hubble, donde la velocidad de un observador B con respecto a A es

$$\vec{v}_{B(A)} = H(t)\vec{r}_{BA}, \quad (2.18)$$

donde $H(t) \equiv \dot{a}/a$ es el parámetro de Hubble que depende solamente del tiempo y \vec{r}_{BA} es el vector que apunta de A a B. La ley de Hubble es la única ley de expansión compatible con homogeneidad e isotropía. Una analogía útil es imaginarse la superficie dos-dimensional de una esfera en expansión (figura 2.2). El ángulo θ_{AB} entre dos puntos A y B sobre la superficie se mantiene sin cambios conforme el radio $a(t)$ incrementa.

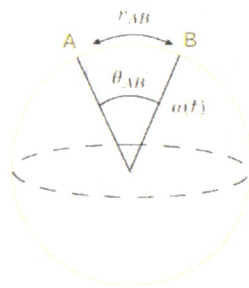


Figura 2.2: Representación de la superficie dos-dimensional de una esfera en expansión, mostrando que el ángulo entre los puntos A y B se mantiene constante sin importar cuanto se incremente el radio de la esfera.

El parámetro de Hubble $H(t)$, mide la tasa de expansión del universo, el valor actual o la constante de Hubble, H_0 , es parametrizado como

$$H_0 = 100h \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (2.19)$$

donde el resultado el parámetro h su mejor estimación hasta el momento es

$$h = 0.72 \pm 0.08. \quad (2.20)$$

También esta cantidad sirve para encontrar el tamaño o distancia de Hubble, el cual determina nuestro volumen de Hubble que es el tamaño de nuestro universo observable.

2.2.4. Métrica FRW.

Relatividad general lleva a una teoría matemáticamente consistente del universo donde la teoría de Newton no. Permite describir materia moviéndose a velocidades relativistas o presiones aleatorias. Sabemos que la radiación dominó el universo por los primeros 100 000 años después del Big Bang. Para entender las épocas importantes en la historia cósmica, es necesario tratar una teoría relativista completa.

La métrica que comprende secciones espacialmente homogéneas e isotrópicas es la máximamente simétrica Friedmann-Robertson-Walker (FRW), que puede escribirse de la forma [18],

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\}, \quad (2.21)$$

donde (t, r, θ, ϕ) son las coordenadas comóviles, $a(t)$ es el factor de escala cósmico. Con una elección adecuada de coordenadas, k puede ser elegido para ser +1, -1 o 0, que describe regiones de curvatura espacial positiva, negativa o cero respectivamente. La coordenada r en (2.21) no posee dimensiones.

Es conveniente expresar la métrica FRW en términos del "tiempo conforme" denotado con τ o η y definido por $d\tau = dt/a(t)$:

$$ds^2 = a^2(\tau) \left\{ d\tau^2 - \frac{dr^2}{1 - kr^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\}. \quad (2.22)$$

Para una elección adecuada de coordenadas, la métrica puede ser escrita como el elemento de línea de Minkowski por un factor conforme.

2.3. Las ecuaciones de Friedmann

En el sentido cosmológico al resolver las ecuaciones de Einstein, es posible entender el comportamiento y la dinámica de la expansión del universo. Esto sólo se puede realizar al resolver las ecuaciones para encontrar la dependencia temporal de $a(t)$,

$$R_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2}\delta_{\beta}^{\alpha}R = 8\pi GT_{\beta}^{\alpha}. \quad (2.23)$$

En adelante se despreciará el término de la constante cosmológica. Las ecuaciones dinámicas que describen la evolución del factor de escala $a(t)$ provienen de las ecuaciones de campo de Einstein. Donde el componente 0-0 de las ecuaciones (2.23), da la llamada ecuación de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (2.24)$$

mientras que las componentes $i - i$ dan

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G\rho, \quad (2.25)$$

si tomamos la diferencia de (2.25) y (2.24) se obtiene la ecuación de aceleración,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (2.26)$$

donde se puede reemplazar $\dot{a}/a = H(t)$, que representa el parámetro de Hubble. EL parámetro de Hubble no es constante y en general varía como t^{-1} . La constante de Hubble H_0 es el valor actual de la tasa de expansión. La ecuación de Friedmann puede ser vuelta a formular, para separar la componente de la k de curvatura de la forma:

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \frac{\rho}{3H^2/8\pi G} - 1 \equiv \Omega - 1, \quad (2.27)$$

donde Ω es la razón de la densidad con la densidad crítica ρ_c :

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} \quad \rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.28)$$

Ya que $H^2 a^2 \geq 0$ hay una correspondencia entre el signo de k y el signo de $\Omega - 1$ Como se ve en al tabla 2.1.

$k = +1$	$\Omega < 1$	Cerrado
$k = 0$	$\Omega = 1$	Plano
$k = -1$	$\Omega > 1$	Abierto

Cuadro 2.1: Relación del parámetro de densidad Ω , dependiendo del valor de la k de curvatura. Donde esto permite identificar o escribir una relación para el tipo de espacio que posee el universo, con lo que es posible predecir de igual como afecta a la expansión de este o el posible caso contrario.

2.4. Composición del universo

El Tensor de energía-momento, si se consideran las simetrías de la métrica y también la homogeneidad, el planteamiento más simple es el de un fluido perfecto caracterizado por una densidad de energía y una presión dependiente del tiempo:

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p). \quad (2.29)$$

El componente $\mu = 0$ de la conservación del tensor de energía momento ($T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$) da la primera ley de la termodinámica de la forma

$$d(\rho a^3) = -pd(a^3), \quad (2.30)$$

que reescribiendo, se puede obtener la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho} = 3H(\rho + p). \quad (2.31)$$

El sentido físico es claro, el cambio de energía en un elemento de volumen comóvil es igual al negativo de la presión por el cambio del volumen. Si el universo es perfectamente homogéneo, entonces esto significa que en él, se realizan procesos adiabáticos. Los procesos adiabáticos son aquellos donde la entropía se mantiene constante. Por lo que la expansión al ser de forma homogénea e isotrópica es un proceso adiabático no se tiene cambio en la entropía presente.

La evolución del universo es complicada ya que contiene diferentes componentes con diferentes ecuaciones de estado, afortunadamente para la causa de simplicidad, la densidad de energía y de presión son aditivas. Por lo que podemos escribir las diferentes componentes de la densidad de energía como la suma de estos:

$$\rho = \sum_{\omega} \rho_{\omega}, \quad (2.32)$$

donde ρ_ω representa la densidad de energía de las componentes con un parámetro de ecuación de estado ω . El total de la presión p es la suma de los distintos componentes de la presión

$$p = \sum_{\omega} p_{\omega} = \sum_{\omega} \omega \rho_{\omega}. \quad (2.33)$$

Debido a que las densidades de energía y presión se añaden de esta forma, la ecuación (2.31) se cumple para cada componente de forma separada siempre y cuando estos no interactúen entre ellos. Por lo que entonces para cada ecuación de estado con parámetro ω obedece, la densidad de energía, ρ en función del factor de escala a ,

$$\rho_{\omega}(a) = \rho_{\omega,0} a^{-3(1+\omega)}. \quad (2.34)$$

Donde se ha utilizado la normalización de $a_0 = 1$, cuando se tiene el tiempo presente al día de hoy y la densidad de energía del componente ω es $\rho_{\omega,0}$. Este resultado es derivado sin utilizar la ecuación de Friedmann.

En la tabla 2.2 se puede observar como evoluciona la densidad de energía para los casos más simples.

Radiación	$(p = \frac{1}{3}\rho)$	$\rho \propto a^{-4}$
Materia	$(p = 0)$	$\rho \propto a^{-3}$
Energía del vacío	$(p = -\rho)$	$\rho \propto \text{const.}$

Cuadro 2.2: Evolución de las densidades de energía más comunes. Estas representan las consideraciones de materia mas sencilla, donde cada una o su combinación, se considera que son el contenido total del universo.

2.5. Modelo λ CDM

El modelo λ CDM, es el que se ha adoptado ya que es el que mejor ajusta a los parámetros disponibles por las observaciones. Este es espacialmente plano contiene radiación, materia y una constante cosmológica. Varias de las propiedades del modelo son en listadas en el cuadro 2.3. El desarrollo de la tesis es basado en este modelo de cosmología.

Para el modelo la constante de Hubble se asume como $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [24], los fotones se asumen que provienen del CMBR con

Componentes	
Fotones:	$\Omega_{\gamma,0} = 5.0 \times 10^{-5}$
Neutrinos:	$\Omega_{\nu,0} = 3.4 \times 10^{-5}$
Radiación total:	$\Omega_{r,0} = 8.4 \times 10^{-5}$
Materia barionica:	$\Omega_{bario,0} = 0.05$
Materia oscura:	$\Omega_{dm,0} = 0.23$
Total de materia:	$\Omega_{m,0} = 0.28$
Constante Cosmológica:	$\Omega_{\Lambda,0} = 0.72$

Épocas importantes		
Igualdad Radiación-Materia:	$a_{rm} = 2.8 \times 10^{-4}$	$t_{rm} = 4.7 \times 10^4$ años
Igualdad Materia-Lambda:	$a_{m\Lambda} = 0.75$	$t_{m\Lambda} = 9.8$ Giga años
Hoy:	$a_0 = 1$	$t_0 \approx 13.5$ Giga años

Cuadro 2.3: Propiedades del modelo Λ CDM [24]. Donde se describen de igual forma las diferentes épocas en las que dominaron los distintos componentes que conforman el universo.

una temperatura actual de $T_0 = 2.725\text{K}$ con un parámetro de densidad de $\Omega_{\gamma,0} = 5.0 \times 10^{-5}$. La densidad de energía de los neutrinos de fondo se calcula como el 65% de la del CMBR siempre y cuando los neutrinos sean relativistas. El contenido de materia del modelo consiste en materia barionica de la cual se consideran los protones y neutrones, teniendo a los electrones asociados a estos y en parte igual por materia oscura no bariónica. La materia bariónica con la cual estamos acostumbrados a tratar tiene un parámetro de densidad de $\Omega_{bario,0} = 0.05$ al día de hoy. El parámetro de densidad de la materia no barionica es casi seis veces mas grande : $\Omega_{dm,0} = 0.23$, sin embargo la mayoría del contenido del modelo no es proporcionado por radiación o materia sino por constante cosmológica con un parámetro de densidad $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{bario,0} - \Omega_{dm,0} = 0.72$.

El universo primeramente fue dominado por radiación, luego materia y actualmente nos encontramos en la fase de dominación de Λ . El cambio de radiación a materia se dio cuando el factor de escala era $a_{rm} = \Omega_{r,0}/\Omega_{m,0} = 3 \times 10^{-4}$, que corresponde a un tiempo $t_{rm} = 4.7 \times 10^4$ años. Mientras que la materia le dio su lugar a la constante cosmológica cuando $a_{m\Lambda}^{1/3} = 0.75$, que corresponde a $t_{m\Lambda}$. Donde para el modelo actual la edad del universo es de $t_0 = 13.5$ giga años.

2.6. La breve historia del universo

Hasta el momento se ha estado describiendo la geometría y la forma en que el universo se expande. Es momento de describir las distintas etapas que nuestro universo ha experimentado durante su evolución, donde se asume la teoría del Big Bang caliente, de igual forma describiendo distintas etapas importantes en la historia que el universo atravesó, que por sus características permitieron la formación actual como lo observamos.

2.6.1. El Big Bang

Como se explicó en la sección 2.4 el universo se expande a distintos valores de $a(t)$ dependiendo del componente dominante, por consiguiente en el pasado el valor del factor de escala era más pequeño que actualmente y la densidad de las distintas componentes del universo era mayor. Por lo que de las ecuaciones de Einstein se puede observar que si el universo se expande actualmente, el factor de escala debe haber sido cero en un tiempo finito y la densidad habrá sido infinita. Sin importar la curvatura del universo, al momento del Big Bang la densidad como la curvatura del universo fueron infinitas. A estas condiciones extrañas se le llama singularidad espacio-temporal [26]. La pregunta sobre lo que sucedió antes del Big Bang, no puede ser resuelta con relatividad general ya que esta ligada a las nociones de espacio y tiempo, pero en el contexto de esta pregunta no tiene sentido ya que no hay tales cosas como espacio y tiempo antes del Big Bang.

2.6.2. Inflación

Cuando el universo tenía una edad $t \propto 10^{-43}$ segundos sufrió un drástico decaimiento en su densidad. Una de las ideas de esto es que sufrió una era inflacionaria, que se considera un periodo de expansión extremadamente grande. Esta idea fue propuesta por Alan Guth en 1981 para tratar de solucionar los problemas presentados anteriormente. Por lo que inflación se considera un periodo en la evolución del universo donde el factor de escala estuvo acelerado

$$\text{inflación} \implies \ddot{a}(t) > 0. \quad (2.35)$$

En esta etapa la tasa de expansión del universo es mas drástica que en otros casos. La idea básica se presenta en la figura 2.3.

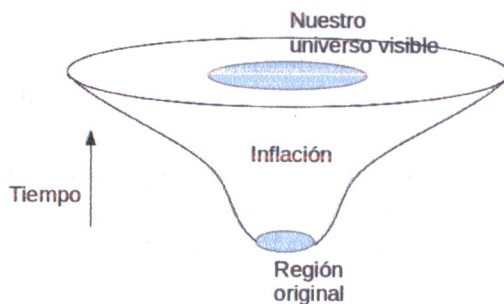


Figura 2.3: Esquema que ejemplifica la época de inflación durante la cual el universo experimento una expansión acelerada en un intervalo de tiempo muy corto, lo que ocasiono un drástico decaimiento en la densidad.

2.6.3. Radiación del fondo cósmico de microondas

La radiación de fondo de microondas o Cosmic Microwave Background Radiation (CMBR), es una forma de radiación electromagnética descubierta en 1965 que llena el Universo por completo satélite Explorador de fondo cósmico ó COBE por las siglas de Cosmic Background Explorer, se dedico a investigar y recolectar el espectro a longitudes de onda menores a los 9.4 cm hasta 0.001mm. Se detecto una distorsión de dipolo de temperatura en la figura 2.4, que no es mas que simplemente el corrimiento al rojo o al azul debido al movimiento traslacional del satélite. Después de corregir la distorsión debido al dipolo de temperatura(figura 2.4 inferior), las fluctuaciones sobrantes son pequeñas en amplitud. Entonces con esto podemos hacer un promedio de la temperatura en todas direcciones siendo,

$$\langle T \rangle = \frac{1}{4\pi} \int T(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = 2.725K. \quad (2.36)$$

Se descubrió que el error es de apenas 30 microKelvin, lo que representa una importante aproximación a la isotropía.

2.6.4. El universo temprano

Cuando la temperatura bajo a unos 4000 grados los electrones y los iones de hidrógeno y helio se combinaron para formar los átomos neutros, con esto la interacción de la materia y la radiación se redujo, hasta que se desligaron.

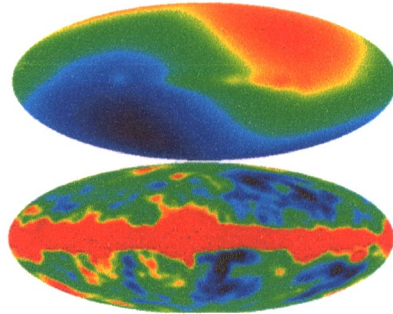


Figura 2.4: Arriba: fluctuaciones de temperaturas como fueron medidas por el COBE. Abajo: fluctuaciones de temperatura después de sustraer el dipolo debido al movimiento del satélite.

Cuando los fotones se enfriaron, sin interferencia importante de la materia, cuando el universo tenía aproximadamente 100 mil años, se da la radiación del fondo cósmico de microondas y se ha enfriado desde entonces hasta su temperatura actual.

Desde esa época pequeñas inhomogeneidades en la distribución de materia comenzaron a crecer debido a su atracción gravitatoria. Gracias a la desvinculación de la materia y radiación, se permitió el desarrollo de las inhomogeneidades en las masas galácticas y otras mas pequeñas. Por ello las galaxias y cúmulos estelares y las estrellas se condensaron a partir del medio original.

Por último se debe mencionar que transcurridos de 5 a 15 mil millones de años, después del Big Bang se formaron nuestro sol y nuestro sistema solar. Otros 4 600 millones de años y llegamos al presente.



Capítulo 3

Materia Oscura

Los cosmólogos por años, han dedicado una gran cantidad de tiempo tratando de determinar la densidad de materia del universo, esto es importante para poder calcular la curvatura del espacio-tiempo y la tasa de expansión del universo. Se desea saber también cuanto del universo esta formado por estrellas o cuantos tipos distintos de materia existen. Estas y otras preguntas han hecho que se necesite catalogar al universo para encontrar de que esta hecho y cuales son estas cantidades.

3.1. Materia visible

En el universo existen muchos tipos de materia, los astrónomos observan a un tipo de estas, las estrellas. Gracias a que emiten luz es posible detectarlas. Estas emiten en distintos rangos del espectro electromagnético. Los astrónomos captan esto y pueden asociarle una luminosidad. Debido a que las estrellas producen luz a través de reacciones nucleares significa que tienen una forma de estimar cuanta masa es necesaria para producirla. Sin embargo, sí esto fuera idéntico para todas las estrellas, por ejemplo para nuestro sol $\langle M/L \rangle = 1M_{\odot}/L_{\odot}$, entonces es posible saber la relación luz-masa de las estrellas, sin embargo se tiene un gran rango de luminosidades dependiendo del tipo de estrellas por lo tanto existe una amplia gama de la relación luz-masa, por lo que es necesario tomar una luminosidad que contenga la mayor variedad posible de estas luminosidades. Si consideramos 1 kiloparsec alrededor de nuestro sol, suponiendo la cantidad más homogénea posible de estrellas, a través de la relación luz-masa, se obtiene un estimado de la den-

sidad de masas de las estrellas en el universo. Entonces esto lo comparamos con la densidad crítica de nuestro universo que equivale a una densidad de $\rho_{c,0} = 1.4 \times 10^{11} M_{\odot} Mpc^{-3}$, con lo que se obtiene que el parámetro de densidad de las estrellas del universo es 0.004. Lo que es mucho menos de la densidad necesaria para que se tenga un universo espacialmente plano.

Además de esto, resulta que nuestra mejor estimación de la densidad de bariones en el universo viene de la nucleosíntesis primordial, además de las mediciones del hidrógeno, deuterio, helio, litio y otros elementos, densidades que dependen de los protones y neutrones presentes. Los estudios de estas densidades indican que el parámetro de densidad de materia barionica debe ser

$$\Omega_{bario,0} = 0.05 \pm 0.01, \quad (3.1)$$

que es un orden de magnitud mayor que el parámetro de densidad de las estrellas. Esto indica claramente, que todo lo que se puede observar en el cielo, la gran cantidad de estrellas, es una porción pequeña de la materia barionica del universo, ya que los demás bariones están distribuidos en componentes apenas visibles, como estrellas enanas, remanentes estelares fríos, planetas y otros objetos que son poco visibles. Incluso considerando todos estos objetos solo son una minoría del total del universo.

3.2. Los tipos de materia oscura

Por las observaciones astronómicas, se sabe que la materia oscura esta presente y conforma un 23 % de la masa del universo además de que difícilmente interactúa con la materia ordinaria excepto por la interacción gravitacional. Sin embargo esto no es suficiente para identificar de que esta hecha.

3.2.1. Hot Dark Matter o materia oscura caliente

Uno de los tipos de candidatos de materia oscura es la materia oscura caliente o Hot Dark Matter (HDM), que son descritos por partículas que poseen velocidades relativistas. Un tipo de estas partículas es el neutrino, que fue propuesto en 1931 por Wolfgang Pauli. Para éste candidato de HDM cuando las perturbaciones alcanzan el orden no-lineal tienden a formar estructuras que se asemejan a objetos unidimensionales similares a panques o blinis. Una vez que forman esta estructura los bariones que se encuentren atrapados se fragmentan lo que provoca que se condensen en objetos más

pequeños del tamaño aproximado de galaxias. Si tenemos que el candidato es el neutrino entonces este al interactuar poco no colisionan entre ellos o el resto de la materia y no pueden disipar su energía gravitacional, por lo que no pueden colapsar en objetos fuertemente ligados, deben de permanecer menos condensados y formar una estructura que sea similar a un sandwich barión-neutrino, donde los bariones serian el equivalente a la carne. Consecuentemente, los neutrinos más lentos serian capturados por las galaxias dominadas por bariones. Se dice que en un universo de materia oscura caliente, las estructuras se forman de arriba hacia abajo. Esto significa que los neutrinos al ser partículas relativistas harían que cualquier región sobredensa se vuelva suavemente distribuida [28], por lo que la formación de las perturbaciones en densidad aparecerían hasta que la velocidad de estos haya disminuido. Sin embargo, las estructuras predichas para este tipo de candidato no son observadas en el universo actual, por lo que actualmente cuando se tiende a hablar de materia oscura caliente, se refiere a una mezcla entre esta y la materia oscura fría.

3.2.2. Cold Dark Matter o Materia oscura fría

El candidato más aceptado es la materia oscura fría o Cold Dark Matter (CDM), el cual se considera en el modelo cosmológico estándar. A diferencia de la materia oscura caliente, los primeros objetos en formarse de tamaño sub-galáctico, se separan de la expansión general del universo y se ligan gravitacionalmente entre ellos. El proceso es tal que al formarse el colapso, los diferentes individuos interactúan intercambiando sus energías y terminan formando sobredensidades, por lo que se dice que la formación de estructura es de abajo hacia arriba. El éxito de este tipo de materia oscura, se debe a que es el más coincide con las observaciones astronómicas a gran escala. La CDM no interactúa con el campo electromagnético, por lo que es totalmente invisible, si tuviera aunque sea una pequeña carga eléctrica o un momento dipolar magnético, se acoplaría al fluido de barión-fotón antes de la recombinación, alterando las características presentes en el CMBR [1, 21]. Además que posee una masa tal que no es relativista. Para esto se busca que a gran escala forme las estructuras que se han desarrollado el universo, sea estable para los núcleos de galaxias, muy débilmente interactuante y fría.

3.3. Formación de Estructura

Hasta ahora, se asumió que el universo es homogéneo e isotrópico, esto puede considerarse cuando se habla de una distribución a grandes escalas, sin embargo el universo real no es así. El universo contiene inhomogeneidades como galaxias, cúmulos, etc. A continuación se discutirá un posible mecanismo para la formación de estas estructuras. [19]

En algún momento en el pasado de nuestro universo, existieron pequeñas desviaciones de la homogeneidad, donde estas pudieron desarrollarse debido a inestabilidad gravitacional y formar diferentes estructuras. Mientras estas pequeñas diferencias sean lo suficientemente pequeñas, pueden ser tratadas a través de un análisis lineal de perturbaciones, sin embargo conforme estas crecen de forma considerable la teoría falla en explicarlo. [8, 19]

La forma de abordar las ecuaciones lineales es expandirlas en un conjunto adecuado de funciones. Si se elige tener un universo esencialmente plano ($\Omega = 0$), el conjunto de estas ecuaciones serán la de ondas planas y al hacer una transformada de Fourier se puede obtener un conjunto de ecuaciones cada una marcada por un vector de onda \mathbf{k} . Esto igual es aplicable para un ($\Omega \neq 0$) sin embargo las ecuaciones resultantes serán más complicadas que la de las ondas planas, sin embargo esto puede corregirse con la selección adecuada de funciones ortonormales. Contando con estas ecuaciones se puede determinar la evolución de forma independiente de cada modo. Sin embargo en Relatividad General el valor de los coeficientes de la métrica $g_{\alpha\beta}$ pueden modificarse, a través de un cambio de coordenadas ($x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$). Esto produce que las perturbaciones pequeñas en principio, crezcan o generen componentes que no existían.

Para los modos cuya longitud de onda es menor que el radio de Hubble, estos pueden tratarse de forma Newtoniana donde el efecto de la curvatura del espacio-tiempo es despreciable. El análisis da una importante visión sobre el comportamiento de las inhomogeneidades sin embargo, sufre de un problema, cualquier modo a un tiempo temprano será más grande que el radio de Hubble. Por lo que en épocas tempranas cualquier modo debe ser tratado a través de Relatividad General. [8, 10, 19]

3.3.1. Definiciones básicas

Antes de comenzar a tratar alguno de los casos, es importante definir ciertas nociones que serán de importancia en el desarrollo.

La primera cantidad a definir es el contraste de densidad, una cantidad adimensional, la cual es una fluctuación en la densidad y se denota [8]

$$\delta(\vec{x}) \equiv \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} = \frac{\rho(\vec{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \quad (3.2)$$

donde $\bar{\rho}$ es el promedio espacial de la densidad de energía. [8, 10, 19, 24]

El contraste de densidad toma valores positivos en regiones de alta densidad y valores negativos en regiones de baja densidad, además tiene como valor mínimo $\delta = -1$ que corresponde a una $\rho(\vec{x}) = 0$. Es conveniente trabajar en coordenadas comóviles teniendo en cuenta $d\vec{x} = a(t)d\vec{x}_{phys}$. Debido a la complejidad de las ecuaciones, se prefiere realizar un desarrollo en series que permita trabajar y analizar distintos modos. Se suele utilizar el espacio de Fourier ya que su transformación no requiere algún tipo particular de simetría. Si dividimos el universo en regiones lo suficientemente largas de tal forma que la distribución de masas sea idéntica en cada una, entonces tendrán propiedades similares cada una. Digamos que estas regiones son cajas de longitud L , donde podemos adecuar un sistema coordenado idéntico en cada caja, el contraste de densidad tiene una expansión en Fourier de la forma

$$\delta(\vec{x}) = \sum_n \delta_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (3.3)$$

Si toma el límite de una caja muy grande, la serie se convierte en una integral de Fourier

$$\delta(\vec{x}) = \frac{V}{2\pi^3} \int_{vol} \delta_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k \quad (3.4)$$

con una inversa definida de la forma

$$\delta_k = V^{-1} \int_{vol} \delta(\vec{x}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x \quad (3.5)$$

donde $V = L^3$ que es el volumen de la caja. La relación entre los modos del espectro continuo y el discreto es $k_x = 2\pi l/L, k_y = 2\pi m/L, k_z = 2\pi n/L$, siendo m, n, l los índices que describen las posiciones en la caja discreta. Además cada componente de Fourier está descrito por su amplitud, número de onda \vec{k} y \vec{x} comóvil de la forma

$$k_{phys} = k/a(t). \quad (3.6)$$

La longitud de onda de una perturbación está relacionado con su número de onda como

$$\lambda \equiv 2\pi/k \quad \lambda = a(t)\lambda_{phys}. \quad (3.7)$$

La elección de estas cantidades perturbadas no es invariante de la norma elegida. Si consideramos una transformación de coordenadas general de un sistema x^μ hacia otro \hat{x}^μ

$$x^\mu \rightarrow \hat{x}^\mu = x^\mu + \epsilon \quad (3.8)$$

entonces se tendría una transformación de la forma $g \rightarrow g + \vartheta(\epsilon)$.

3.3.2. Modelo esférico de inestabilidad gravitacional

Para entender como el contraste de densidad crece con el tiempo, hay que considerar un caso simple. [8, 19, 24] Considérese un universo FRW solamente con contenido de materia. Se toma una pequeña región de este universo que cumple con la condición de ser homogénea e isotrópica y cuasi-estática, donde la expansión del universo es despreciable y se tiene una densidad de materia $\bar{\rho}$. Entonces a esta pequeña región se toma una porción esférica de la misma de radio R (figura 3.1), a la cual por algún mecanismo externo se le añade una cantidad extra de masa, por lo cual la densidad dentro de la esfera será $\bar{\rho}(1 + \delta)$, con ($\delta \ll 1$). Suponiendo que el exceso de masa es uniforme dentro de la esfera, se puede considerar un factor de Hubble, para esta región con exceso de masa,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho}(1 + \delta) - \frac{k}{R(t)}, \quad (3.9)$$

por lo que se puede obtener la ecuación de aceleración para este caso

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G \bar{\rho}}{3} \delta(t), \quad (3.10)$$

Por lo que si se tiene una sobredensidad, que es indicado por poseer una ($\delta > 0$), la región esférica colapsará hacia su centro ($\ddot{R}(t) < 0$). El resto permanece sin cambios.

En la ecuación (3.10) tenemos 2 incógnitas, si se quiere encontrar el comportamiento de $\delta(t)$ es necesario tener otra ecuación. Como la masa se mantiene constante, se puede obtener una relación

$$M = \rho * V = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho}[1 + \delta(t)]R(t)^3. \quad (3.11)$$

Ya que esta cantidad permanece constante durante el colapso, podemos reescribirla para tener una relación entre R y δ

$$R(t) = R_0[1 + \delta(t)]^{-1/3}, \quad (3.12)$$

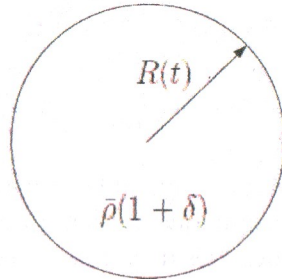


Figura 3.1: Esfera de radio $R(t)$ expandiéndose o contrayéndose bajo la influencia de una fluctuación de la densidad $\delta(t)$. Que caracteriza el ejemplo más simple de colapso, debido al exceso de materia en una región determinada.

donde

$$R_0 \equiv \left(\frac{3M}{4\pi\bar{\rho}} \right)^{1/3} = \text{constante.} \quad (3.13)$$

Considerando que $\delta \ll 1$, se puede hacer una expansión para $R(t)$ hasta primer orden,

$$R(t) \approx R_0 \left[1 - \frac{1}{3}\delta(t) \right]. \quad (3.14)$$

Si se toma las derivadas de $R(t)$

$$\ddot{R} \approx -\frac{1}{3}R_0\ddot{\delta}. \quad (3.15)$$

Como en esta aproximación se considera la conservación de la masa, se tiene que $R_0 > \delta$, concluyendo $R_0 \approx R$ teniendo en cuenta esto se puede escribir

$$\frac{\ddot{R}}{R} \approx -\frac{1}{3}\ddot{\delta}. \quad (3.16)$$

Se combinan las ecuaciones (3.10) y (3.16), para encontrar una ecuación que describa el comportamiento de δ ,

$$\ddot{\delta} = 4\pi G\hat{\rho}\delta, \quad (3.17)$$

cuya solución mas general,

$$\delta(t) = A_1 e^{t/t_{dyn}} + A_2 e^{-t/t_{dyn}}, \quad (3.18)$$

donde el tiempo dinámico del colapso esta dado por

$$t_{dyn} = \frac{1}{(4\pi G \bar{\rho})^{1/2}}, \quad (3.19)$$

notando que el tiempo dinámico depende únicamente de $\bar{\rho}$ y no de R . Las constantes A_1 y A_2 son determinadas por las condiciones iniciales de la esfera. Además hay que notar que después de varias veces el tiempo dinámico, solo la componente creciente de la exponencial contribuye. Esto significa que cuando están presentes pequeñas fluctuaciones en un región con un promedio de la densidad casi estático y el medio no posee presión alguna, las fluctuaciones crecerán de forma exponencial con el tiempo.

3.4. Evolución de las inhomogeneidades

Antes de encontrar como evoluciona δ en el universo, primero se necesita una idea cualitativa de como debe comportarse. Por esto para realizar el análisis, separemos en modos más grandes que el radio de Hubble, $\lambda \gg d_H$ y modos que se encuentran dentro del radio de Hubble, $\lambda \ll d_H$.

Iniciando con el primer caso tenemos entonces una longitud de onda mayor que el diámetro de Hubble (d_H), para la fase de dominación de radiación $\rho_0 \approx a^{-4}$ cuando $t < t_{eq}$ y en la fase de dominación de materia $\rho_0 \approx a^{-3}$ cuando $t > t_{eq}$. Con esto entonces:

$$\left(\frac{\delta \rho}{\rho} \right) = \begin{cases} a^2 & (t < t_{eq}) \\ a & (t > t_{eq}) \end{cases}.$$

Entonces los modos con $\lambda > d_H$ siempre crecen como a^2 en la fase de dominación de radiación y como a en la de materia, considerando esta aproximación [19].

Cuando los modos entran al radio de Hubble ($\lambda < d_H$). Hay dos procesos que evitan el crecimiento de la amplitud de la perturbación. El primero es debido al soporte que ejerce la presión. Si transcurre el suficiente tiempo para que la presión aumente hasta poder evitar el colapso, entonces esta prevendrá el realce gravitacional del contraste de densidad.

El segundo proceso para detener el crecimiento es cuando la cantidad perturbada no es la dominante en la expansión o la especie dominante esta suavemente distribuida.

Tomando una perspectiva cualitativa podemos englobar 3 escenarios para la evolución de un modo que entra al radio de Hubble, entre la fase de dominación de radiación y materia:

1. ($a < a_{enter}$); La longitud de onda de la perturbación es mayor que el radio de Hubble, se tiene entonces que

$$\delta \equiv \left(\frac{\delta\rho}{\rho} \right) \propto a^2 \quad (3.20)$$

2. ($a_{enter} < a < a_{eq}$) La perturbación esta dentro del radio de Hubble, es lo suficientemente mayor para causar colapso gravitacional, sin embargo no es el componente principal de la expansión. Esto previene el colapso y se tiene que

$$\delta \equiv \left(\frac{\delta\rho}{\rho} \right) = \text{constante} \quad (3.21)$$

3. ($a_{eq} < a$) La perturbación esta dentro del radio de Hubble, es suficiente para causar colapso gravitacional y es el componente que dirige la expansión. El crecimiento es descrito por

$$\delta \equiv \left(\frac{\delta\rho}{\rho} \right) \propto a \quad (3.22)$$

3.4.1. Análisis Newtoniano

Fluido sin expansión

Para realizar el análisis de un componente de materia en el universo se utiliza un fluido perfecto, el cual es un medio continuo en el que las resistencias internas son cero lo que le permite fluir sin oposición, esta caracterizado perfectamente por una densidad de energía y una presión. Las ecuaciones de Euler de un movimiento Newtoniano de un fluido perfecto son [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) &= 0 \\ \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\varphi &= 0 \\ \nabla^2\varphi &= 4\pi G\rho \end{aligned} \quad (3.23)$$

si se considera que existe una perturbación y una solución estática del tipo

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (3.24)$$

$$p = p_0 + p_1 \quad (3.25)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \quad (3.26)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \quad (3.27)$$

donde se considera que todas las cantidades con subíndices "0" son constantes [8, 19]. Combinando las soluciones descritas, se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 = 4\pi G \rho_0 \rho_1. \quad (3.28)$$

Esta es conocida como la ecuación de onda cuya solución es de la forma

$$\rho_1(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r}, t) \rho_0 = A e^{(-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega t)} \rho_0 \quad (3.29)$$

se tiene la relación de dispersión

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (3.30)$$

donde $k \equiv |\vec{k}|$. Entonces a los modos que producen un ω imaginario, que son exponencialmente crecientes, marcan un valor crítico que es llamado el número de onda de Jeans y está dado por:

$$k_j = \left(\frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2} \right) \quad (3.31)$$

Lo que se puede relacionar con una longitud de onda llamada la longitud de Jeans $\lambda_J = 2\pi/k_J$, y en este caso una masa

$$M_J \equiv \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\pi}{k_J} \right)^3 \rho_0 = \frac{\pi^{5/2}}{6} \frac{v_s^3}{G^{3/2} \rho_0^{1/2}}. \quad (3.32)$$

Aquí las perturbaciones menores a M_J son estables ante el colapso gravitacional y las que son mayores son inestables.

Fluido en expansión

Las perturbaciones a la densidad que sean menores a la distancia de Hubble pueden crecer en amplitud únicamente cuando ya no tienen apoyo de la presión. Para la materia la pérdida de presión, sucede abruptamente en el tiempo del desacoplamiento. Si se retira la presión y se tienen modos superiores a la longitud de Jeans, esto no implica que necesariamente el crecimiento de las fluctuaciones vaya a crecer exponencialmente como se vio en la sección (3.4), en ese caso se tenía que el universo era estático, ahora hay que tomar en cuenta la expansión del universo.

En un universo homogéneo e isotrópico, la densidad de energía promedio es una función del tiempo y las velocidades obedecen la ley de Hubble.

Tomando una pequeña densidad perturbada, ($\rho_1 < 1$), y considerando ahora la expansión del universo ($r_{phys} = a(t)r$), la solución no perturbada para la ec. (3.23) es

$$\rho_0 = \rho_0(t_0)a^{-3}(t), \quad \vec{v}_0 = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r}, \quad \nabla\varphi_0 = \frac{4\pi G\rho_0}{3}\vec{r} \quad (3.33)$$

donde $a(t)$ satisface al ecuación de Friedmann. Las perturbaciones hasta primer orden en ρ , \vec{v} y ϕ satisfacen el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho_1}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_1 + \frac{\dot{a}}{a}(\vec{r}\cdot\nabla)\rho_1 + \rho_0\nabla\cdot\vec{v}_1 &= 0 \\ \frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v}_1 + \frac{\dot{a}}{a}(\vec{r}\cdot\nabla)\vec{v}_1 + \frac{c_s^2}{\rho_0}\nabla\varphi_1 &= 0 \\ \nabla\varphi_1 &= 4\pi G\rho_1. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Definiendo $\delta(\vec{r}, t) = \rho_1/\rho_0$ y transformando las funciones al espacio de Fourier de la forma

$$f(\vec{r}, t) = (2\pi)^{-3} \int f_k(t) \exp\left[\frac{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}{a(t)}\right] d^3k, \quad (3.35)$$

con lo cual es posible simplificar las ecuaciones (3.34), como se menciono anteriormente, no se acostumbra a trabajar en el espacio real, sino en el

espacio de Fourier,

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_k - \frac{i\vec{k}}{a} \cdot \vec{v}_k &= 0 \\ \frac{d(a\vec{v}_k)}{dt} - i\vec{k}c_s^2\delta_k - i\vec{k}\varphi_k &= 0 \\ \varphi_k &= -\frac{4\pi G\rho_0}{k^2}a^2\delta_k \end{aligned} \quad (3.36)$$

\vec{k} es el numero de onda comóvil, y $\vec{x} = \vec{r}/a$ es la coordenada comóvil. Es útil descomponer la velocidad perturbada en una parte rotacional, \vec{v}_\perp , y una irrotacional \vec{v}_\parallel ,

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp, \quad \vec{v}_k = \vec{v}_\parallel(\vec{k}) + \vec{v}_\perp(\vec{k}), \quad (3.37)$$

se puede deducir ciertas propiedades que permiten simplificar el trabajo matemático, teniendo

$$\nabla \cdot \vec{v}_\perp = 0, \quad \nabla \times \vec{v}_\parallel = 0, \quad (3.38)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{v}_\perp(\vec{k}) = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{v}_\parallel(\vec{k}) = |\vec{k}||\vec{v}_\parallel(\vec{k})|, \quad (3.39)$$

la componente paralela se puede escribir como un gradiente de un campo escalar, mientras que \vec{v}_\perp se puede escribir como el rotacional de un campo vectorial. Por lo que de las ecuaciones de perturbación se puede ver

$$d[a\vec{v}_\perp(\vec{k})]/dt = 0, \quad (3.40)$$

usando la ecuación de continuidad

$$\dot{\delta}_k - \frac{i}{a}|\vec{k}||\vec{v}_\parallel(\vec{k})| = 0 \Rightarrow |\vec{v}_\parallel| = \frac{a}{ik}\dot{\delta}_k \quad (3.41)$$

sustituyendo esto en la segunda ecuación de (3.36) y utilizando la ecuación de Poisson para eliminar la dependencia en φ_k , se puede obtener la ecuación de movimiento para la perturbación:

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k + \left(\frac{c_s^2k^2}{a^2} - 4\pi G\rho_0\right)\delta_k = 0 \quad (3.42)$$

donde se puede observar que los modos rotacionales, no se encuentran acoplados a la perturbación. Gracias a que la ecuación se cumple para cualquier modo y que solo los irrotacionales serán considerados entonces podemos ignorar por ahora los subíndices. De esta ecuación si consideramos un universo

estático ($\dot{a} = 0$), se recupera la ecuación (3.28 reconociendo que k/a es el numero de onda físico. Entonces de forma similar, se puede identificar que el comportamiento de la solución depende de que tan grande o pequeño respecto a $4\pi G\rho_0$ sea k . Con un universo en expansión, es posible relacionarle un numero de onda de Jeans, $k_J^2 = 4\pi G\rho a^2/c_s^2$, que separa a los modos gravitacionales estables de los inestables.

Entonces para los modos , $k \gg k_J$ la perturbación es oscilatoria como una onda de sonido

$$\delta(t) \sim \exp(\pm i\omega t), \quad (3.43)$$

teniendo que la frecuencia es

$$\omega = \frac{c_s^2 k}{a(t)(1-n)} \quad (3.44)$$

con el factor de escala $a(t) \propto t^n$. En general la solución es un tipo de funciones de Bessel y la amplitud de la onda de sonido decrece con el tiempo y depende si el universo es dominado por materia, radiación y como evoluciona c_s .

Para $k \ll k_J$ existen soluciones inestables, que corresponden a los modos crecientes. Entonces si asumimos un FRW con un universo dominado por materia y espacialmente plano, tenemos que ($\dot{a}/a = (2/3)t^{-1}$) y $\rho_0 = (6\pi Gt^2)^{-1}$, entonces podemos reescribir (3.42) como

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{2}{3t^2}\delta = 0, \quad k \ll k_J. \quad (3.45)$$

La ecuación toma la forma de una ecuación de Euler, que puede resolverse con el cambio de variable $t = e^z$. Las soluciones, para el modo creciente, δ_+ , y el modo decreciente, δ_- , tienen un dependencia temporal

$$\delta_+(t) = \delta_+(t_i) \left(\frac{t}{t_i}\right)^{2/3}; \quad \delta_-(t) = \delta_-(t_i) \left(\frac{t}{t_i}\right)^{-1}. \quad (3.46)$$

El tiempo t_i corresponde a algún tiempo arbitrario elegido para normalizar la solución. Si identificamos para el universo dominado por materia que $a(t) \propto t^{2/3}$, si se normalizar al tiempo actual, t_i , el factor de escala es $a_0 = 1$ y la soluciones se reescriben como

$$\delta_+(a) = \delta_+(a_0)a; \quad \delta_-(a) = \delta_-(a_0)(a)^{-3/2}. \quad (3.47)$$

Observando las soluciones, la principal diferencia entre la inestabilidad de Jeans entre un universo estático y uno en expansión es que la expansión del

universo reduce el crecimiento exponencial de la inestabilidad lo que resulta en una ley de potencias para el crecimiento de los modos inestables.

La discusión puede ser fácilmente generalizada para distintas componentes si tenemos el contraste de densidad $\delta_A = (\delta\rho_A/\rho_A)$ donde A es algún componente, en este caso se tiene

$$\ddot{\delta}_A + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_A + \frac{c_A^2 k^2}{a^2}\delta_A = \sum_K 4\pi G\rho_K\delta_K, \quad (3.48)$$

donde la suma del lado derecho es sobre todos los componentes incluyendo la componente A . Se debe de remarcar que cualquier miembro que sea homogéneo, $\delta = 0$, no contribuye en la parte derecha de la ecuación.

3.5. Inestabilidad Gravitacional en el caso relativista

Todo el análisis que se ha realizado, fue considerando el limite de Newton, $\lambda \ll d_H$. Pero es momento de estudiar el caso cuando la longitud de onda es $\lambda \gg d_H$. Para realizar el análisis en este régimen es necesario utilizar un acercamiento utilizando Relatividad General [12]. Cuando se realiza esta aproximación es importante notar que los modos $k/H \ll 1$.

En el análisis se considerará un universo espacialmente plano y por finalidad de cálculo se utiliza que las coordenadas están descritas por las coordenadas comóviles $x^\mu = (\tau, \vec{x})$ donde la relación con el tiempo es $dx^0 = d\tau = dt/a(t)$. Durante el resto del capítulo los puntos denotarán derivada con respecto a τ , a menos que se indique lo contrario.

Entonces el tensor métrico está definido en la norma síncrona y las componentes g_{00} y g_{0i} están sin perturbar. El elemento de línea queda descrito por

$$ds^2 = a^2(\tau) (-d\tau^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j) \quad (3.49)$$

Las perturbaciones de la métrica, h_{ij} , se pueden descomponer en una parte correspondiente a la traza ($h_{ii} \equiv h$) y una parte sin traza que consiste en 3 piezas, ($h_{ij} = h\delta_{ij}/3 + h_{ij}^{\parallel} + h_{ij}^{\perp} + h_{ij}^T$). Por definición las divergencias de h_{ij}^{\parallel} y h_{ij}^{\perp} son longitudinales y transversales respectivamente y h_{ij}^T es transversal entonces se satisface

$$\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j h_{ij}^{\parallel} = 0, \quad \partial_i\partial_j h_{ij}^{\perp} = 0, \quad \partial_i h_{ij}^T = 0 \quad (3.50)$$

Entonces sucede que se pueden clasificar dependiendo de quien produce los componentes. Para h_{ij}^{\parallel} puede escribirse en términos de algún campo escalar μ y h_{ij}^{\perp} en términos de algún vector \vec{A} de la siguiente forma

$$\begin{aligned} h_{ij}^{\parallel} &= \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) \mu, \\ h_{ij}^{\perp} &= \partial_i A_j + \partial_j A_i, \quad \partial_i A_i = 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Las 2 componentes escalares h y μ caracterizan los modos escalares de la perturbaciones a la métrica, mientras que A_i y h_{ij}^T representan los vectoriales y tensoriales respectivamente.

Lo que nos interesa estudiar son los modos escalares ya que tienen la mayor contribución a las perturbaciones. Se definen 2 campos $h(\vec{k}, \tau)$ y $\eta(\vec{k}, \tau)$ en el espacio k y se escribe h_{ij} desglosado en estos términos,

$$h_{ij} = \int d^3k e^{i\vec{k}x} \left\{ \hat{k}_i \hat{k}_j h(\vec{k}, \tau) + \left(\hat{k}_i \hat{k}_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) 6\eta(\vec{k}, \tau) \right\}, \quad \vec{k} = k\vec{k}. \quad (3.52)$$

Donde h denota la traza de h_{ij} tanto en el espacio real como en el espacio de Fourier.

3.5.1. Evolución fuera del horizonte

Como se menciono al inicio, se va estudiar la evolución de las perturbaciones cuando estas son $k/H \ll 1$, en la actualidad los modos en este limite son muy pocos y no debería ser necesario, sin embargo el análisis debe realizarse, ya que cualquier modo en un tiempo lo suficientemente temprano es mayor que el tamaño del horizonte. Considerando estas perturbaciones, la evolución se realizan en un universo FRW espacialmente plano, para el cual que existe ecuaciones no perturbadas del factor de escala $a(\tau)$ [12]

$$\mathcal{H}^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G a^2 \bar{\rho}}{3}. \quad (3.53)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = -\frac{4\pi}{3} G a^2 (\bar{\rho} + \bar{P}), \quad (3.54)$$

los puntos indican derivada con respecto a τ , las barra indican las cantidades promedio y \mathcal{H} es el parámetro de Hubble conforme. Aparte de estas

ecuaciones, las perturbaciones también poseen una parte que corresponde a $\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G\delta T_{\mu\nu}$, las cuales corresponden a la linealización de las ecuaciones de Einstein. En términos de h y η en el espacio k , las partes tiempo-tiempo, tiempo-espacio longitudinal, traza espacio-espacio y parte longitudinal sin traza espacio-espacio dan las siguientes 4 ecuaciones hasta orden lineal [12]

$$k^2\eta - \frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} = 4\pi Ga^2\delta T_0^0 \quad (3.55a)$$

$$k^2\dot{\eta} = 4\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{P})\theta \quad (3.55b)$$

$$\ddot{h} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} - 2k^2\eta = -8\pi Ga^2\delta T_i^i \quad (3.55c)$$

$$\ddot{h} + 6\dot{\eta} + 2\frac{\dot{a}}{a}(\dot{h} + 6\dot{\eta}) - 2k^2\eta = -24\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{P})\sigma. \quad (3.55d)$$

Las variables θ y σ están definidas como

$$(\bar{\rho} + \bar{P})\theta \equiv ik^j\delta T_j^0, \quad (\bar{\rho} + \bar{P})\sigma \equiv -(\hat{k}_i\hat{k}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Sigma_j^i) \quad (3.56)$$

donde $\Sigma_j^i \equiv T_j^i - \delta_j^i T_k^k/3$ designa la componente sin traza del tensor T_j^i . Se debe designar la relación para δT_j^i . Entonces si se considera el tensor de energía momento de un fluido perfecto

$$T_\nu^\mu = Pg_\nu^\mu + (\rho + P)U^\mu U_\nu, \quad (3.57)$$

en la cual $U^\mu = dx^\mu/\sqrt{-ds^2}$ es la cuadrivelocidad del fluido. Se perturba hasta el orden lineal y se le permite tener un stress anisotrópico Σ_j^i , además se considera que el fluido tiene una pequeña velocidad coordinada de la forma $v^i \equiv dx^i/d\tau$, donde v^i puede tratarse como una perturbación del mismo orden que $\delta\rho = \rho - \bar{\rho}$, $\delta P = P - \bar{P}$, considerando esto se tiene que $T^{\mu\nu} = \bar{T}^{\mu\nu} + \delta T^{\mu\nu}$. Hasta el orden mencionado para las perturbaciones, se tiene que el tensor energía momento esta dado como

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -(\bar{\rho} + \delta\rho) \\ T_i^0 &= (\bar{\rho} + \bar{P})v_i = -T_0^i \\ T_j^i &= (\bar{P} + \delta P)\delta_j^i + \Sigma_j^i, \quad \Sigma_i^i = 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Hay que notar que la definición de θ para un fluido es simplemente $\theta = ik^j v_j$. La descripción de un fluido no relativista es muy apropiada para la

materia oscura y para los bariones. Al asumir un fluido podemos asignarle una ecuación de estado $\omega \equiv P/\rho$. Entonces de la ecuación de conservación del tensor de energía momento

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\nu} T^{\nu\beta} = 0 \quad (3.59)$$

se tiene que la que corresponde a la parte perturbada en el espacio k

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= -(1 + \omega) \left(\theta + \frac{\dot{h}}{2} \right) - 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\delta P}{\delta \rho} - \omega \right) \delta, \\ \dot{\theta} &= -\frac{\dot{a}}{a} (1 - 3\omega) \theta - \frac{\dot{\omega}}{1 + \omega} \theta + \frac{\delta P / \delta \rho}{1 + \omega} k^2 \delta - k^2 \sigma. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Las ecuaciones son validas para un fluido simple, para el promedio de la masa de δ y θ o cualquier otro tipo.

3.5.2. Materia oscura fría

La propiedad más importante de la materia oscura fría es que interactúa solamente por gravedad, entonces podemos considerarle que es un fluido sin presión o un fluido perfecto. En la norma síncrona, por la forma en que se encuentran definidas las coordenadas, no se poseen velocidades peculiares. por lo que se puede hacer $\theta = \sigma = 0$ y $\omega = \dot{\omega} = 0$ en las ecuaciones (3.60), con esto se reducen a

$$\dot{\delta}_c = -\frac{1}{2} \dot{h}. \quad (3.61)$$

Utilizando esta relación es posible encontrar la ecuación para la perturbación y resolverla. Sustituyendo en la ecuación (3.55) las consideraciones se tiene que $\theta = \sigma = 0$

$$k^2 \eta - \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{h} = -4\pi G a^2 \delta \rho \quad (3.62a)$$

$$k^2 \dot{\eta} = 0 \quad (3.62b)$$

$$\ddot{h} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{h} - 2k^2 \eta = 0 \quad (3.62c)$$

$$\ddot{h} + 6\ddot{\eta} + 2 \frac{\dot{a}}{a} (\dot{h} + 6\dot{\eta}) - 2k^2 \eta = 0, \quad (3.62d)$$

385. INESTABILIDAD GRAVITACIONAL EN EL CASO RELATIVISTA

donde también se ha considerado que $\delta P = 0$. Entonces se utilizan (3.62a), para encontrar una ecuación de las perturbaciones, (3.62c)

$$k^2\eta - \frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} = -4\pi G a^2 \delta\rho \quad (3.63)$$

$$\ddot{h} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} - 2k^2\eta = 0. \quad (3.64)$$

Combinando estas se obtiene que la ecuación resultante esta en términos de h

$$\ddot{h} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{h} + 8\pi G a^2 \delta\rho = 0, \quad (3.65)$$

pero es posible dejarla en términos de δ utilizando la relación (3.61),

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G a^2 \bar{\rho}\delta = 0, \quad (3.66)$$

consideración la definición de $\delta = \delta\rho/\bar{\rho}$. Si se observa tiene cierta similitud a la ecuación (3.42), pero esta última utiliza tiempo cósmico por lo que es necesario hacer la conversión para compararlas. Haciendo que $d\tau = dt/a$,

$$\begin{aligned} a\frac{d}{dt}\left(a\frac{d\delta}{dt}\right) + a\frac{da}{dt}\frac{d\delta}{dt} - 4\pi G a^2 \rho\delta &= 0, \\ a^2\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2a\frac{da}{dt}\frac{d\delta}{dt} - 4\pi G a^2 \rho\delta &= 0, \end{aligned} \quad (3.67)$$

entonces designando las derivadas como puntos y dividiendo entre a^2 se tiene

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\rho\delta = 0, \quad (3.68)$$

donde el parámetro de Hubble es $H = \dot{a}/a$. De esta forma se puede ver que es igual a la ecuación (3.42). Debido a la norma que se utiliza el término k^2 no esta presente y su información no es transmitida al resto de la ecuación. Lo que significa que en esta norma, para el caso de materia oscura fría no se puede encontrar una longitud de Jeans asociada. Pero como se consideran solo longitudes mayores al horizonte esta preocupación puede despreciarse. Considerando que el universo es dominado por materia para el contraste de densidad se recupera que la solución creciente es $\delta \sim a(t)$. Todo lo anterior es considerando que las ecuaciones son consistentes, la condición para esto es que la ecuación (3.62b) se cumpla. Entonces para comprobarlo, se utiliza

$$k^2\eta - \frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} = -4\pi G a^2 \delta\rho. \quad (3.69)$$

Si se realiza la derivada con respecto al tiempo conforme se obtiene que

$$k^2\dot{\eta} = -4\pi Ga^2\delta\dot{\rho} - 8\pi Ga\dot{a}\delta\rho + \frac{1}{2}\frac{\ddot{a}}{a}\dot{h} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\dot{h} + \frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{a}\ddot{h}, \quad (3.70)$$

utilizando entonces la ecuación (3.62c) para dejar en términos de h y ρ ,

$$k^2\dot{\eta} = -4\pi Ga^2\delta\dot{\rho} - 8\pi Ga\dot{a}\delta\rho + \frac{1}{2}\frac{\ddot{a}}{a}\dot{h} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\dot{h} + \frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{a}\left(-2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} + 2k^2\eta\right), \quad (3.71)$$

en la ecuación están presentes las derivadas de h , y se utiliza (3.69) para dejarlo completamente en términos de la densidad o \dot{h}

$$k^2\dot{\eta} = -4\pi Ga^2\delta\dot{\rho} - 8\pi Ga\dot{a}\delta\rho + \frac{1}{2}\frac{\ddot{a}}{a}\dot{h} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\dot{h} + \frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{a}\left(-\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} - 8\pi Ga^2\delta\rho\right). \quad (3.72)$$

Acomodando términos y utilizando 3.61 se tiene que

$$k^2\dot{\eta} = -4\pi Ga^2\delta\dot{\rho} - 12\pi Ga^2\frac{\dot{a}}{a}\delta\rho - \frac{\ddot{a}}{a}\dot{\delta} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\dot{\delta} \quad (3.73)$$

para comprobar lo que se desea es necesario utilizar las ecuaciones no perturbadas, la de continuidad y las siguientes consideraciones

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \quad (3.74)$$

y además que la derivada del contraste de densidad puede escribirse como

$$\dot{\delta} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}\right) = \frac{\delta\dot{\rho}}{\bar{\rho}} - \delta\frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} = \frac{\delta\dot{\rho}}{\bar{\rho}} + 3\mathcal{H}\delta, \quad (3.75)$$

donde se ha utilizado que $\dot{\bar{\rho}} = -3\mathcal{H}(\bar{\rho} + P)$ y que $P = 0$, $\mathcal{H} = \dot{a}/a$, el parámetro conforme de Hubble. Con estas consideraciones se reduce (3.73) a

$$\begin{aligned} k^2\dot{\eta} &= -4\pi Ga^2\bar{\rho}\left(\frac{\delta\dot{\rho}}{\bar{\rho}}\right) + 4\pi Ga^2\bar{\rho}\dot{\delta} - 12\pi Ga^2\bar{\rho}\mathcal{H}\delta \\ k^2\dot{\eta} &= 4\pi Ga^2\bar{\rho}(3\mathcal{H}\delta) - 12\pi Ga^2\mathcal{H}\bar{\rho}\delta = 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Con lo que la consistencia es demostrada y las afirmaciones anteriores se mantienen.

405. INESTABILIDAD GRAVITACIONAL EN EL CASO RELATIVISTA

Capítulo 4

Campos escalares

El concepto de campo escalar data del siglo XVII y su aplicación es variada, pero el interés aquí es el de representar a la materia oscura, presentando los principios básicos necesarios y como es que puede utilizarse para describirla.

4.1. La acción y el Lagrangiano

Hasta donde se sabe, las leyes fundamentales de la física pueden ser derivadas a partir de una acción

$$S = \int L dt \quad (4.1)$$

donde el Lagrangiano L depende de las coordenadas generalizadas q_n y sus derivadas respecto al tiempo \dot{q}_n . El Lagrangiano tiene unidades de energía por tiempo, por lo que al elegir que $C = 1$, se tiene una acción adimensional. La evolución clásica de un sistema esta dada por el principio de mínima acción, el cual dice que $\delta S = 0$, donde δS es la variación de S , donde en los extremos es cero, con lo cual se eliminan los términos de frontera.

Si suponemos un Lagrangiano, que es función únicamente de q y \dot{q} , pero se permite tener la dependencia temporal explicita; $L(q, \dot{q})$. La evolución de q está dada por el principio de mínima acción $\delta S = 0$

$$\delta S = \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right). \quad (4.2)$$

Si se integra por partes el segundo término y se tiene la consideración que al evaluarse en los extremos la variación es cero en estos puntos, se puede encontrar que el principio de mínima acción lleva a

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0, \quad (4.3)$$

llamada la ecuación de Euler-Lagrange.

Esta ecuación puede ser generalizada para mas grados de libertad, además es una ecuación diferencial de segundo orden que puede ser resuelta a partir de los valores iniciales de q y \dot{q} .

4.2. Campo escalar en espacio-tiempo plano

Por ahora se considera un espacio-tiempo plano. El principio de mínima acción tiene que contener una Lagrangiano invariante ante una transformación de Lorentz, para lograr esto debe ser de la forma $L = \int \mathcal{L} d^3x$, donde la densidad Lagrangiana \mathcal{L} es una invariante de Lorentz y tiene unidades de [energía]⁴. La acción ahora es

$$S = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (4.4)$$

4.2.1. El lagrangiano

Para un campo escalar, ϕ , el Lagrangiano más sencillo que cumple los requerimientos necesarios para ser invariante de Lorentz es [11]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) \quad (4.5)$$

en esta expresión, $V(\phi)$ es alguna función, llamada el potencial del campo escalar, y el otro término es llamado el término cinético. Hay que notar que V tiene unidades de [energía]⁴. Los nombres de “término potencial” y “término cinético” son elegidos debido a la analogía mecánica con el Lagrangiano de una partícula puntual.

4.2.2. Ecuación del campo

La evolución de ϕ esta dada por $\delta S = 0$, entonces

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] \quad (4.6)$$

si se aplica la integración por partes al segundo término con respecto a las variables x^μ , la diferencial total resultante se desvanece lo suficientemente rápido en infinito, entonces podemos escribir las ecuaciones del campo como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0, \quad (4.7)$$

tomando \mathcal{L} de la ecuación (4.5) resulta

$$\ddot{\phi} - \nabla^2 \phi + V'(\phi) = 0 \quad (4.8)$$

donde la cantidad primada denota $d/d\phi$. Esto también puede ser escrito como

$$\square \phi - V'(\phi) = 0. \quad (4.9)$$

Si el campo solo depende del tiempo, lo que significa que es homogéneo en el espacio, la ecuación se reduce a

$$\ddot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (4.10)$$

Lo cual es similar a la ecuación que se obtiene en mecánica clásica para una partícula puntual, identificando a la posición como ϕ y al potencial $V(\phi)$.

4.2.3. El campo escalar cuasi-libre

Se tiene un campo escalar bajo la acción de un potencial

$$V = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (4.11)$$

con este potencial la ecuación (4.8) se vuelve lineal

$$\ddot{\phi} - \nabla^2 \phi + m^2 \phi = 0. \quad (4.12)$$

Esta es la ecuación de Klein-Gordon, cuya solución general se puede expresar como una suma de ondas planas. Este se representa como un campo donde las ondas planas no interactúan, por lo que es no interactuante o libre.

Si hacemos la suposición de que el campo ϕ es espacialmente homogéneo, entonces la ecuación (4.10) se convierte

$$\ddot{\phi}(t) + m^2\phi(t) = 0. \quad (4.13)$$

cuya solución es la de un oscilador armónico con una frecuencia angular m , que es una analogía útil cuando se presentan problemas similares.

4.3. Campo en un espacio curvo

Antes de presentar las ecuaciones en un espacio-tiempo curvo, primero es necesario escribir la acción que se tiene para el espacio-tiempo plano en coordenadas genéricas, Si se escribe el elemento de volumen de tal forma que

$$S = \int d^4x \sqrt{-\eta} \mathcal{L}, \quad (4.14)$$

donde η es el determinante de la métrica del espacio-tiempo de Minkowski, $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$, se considera que $\partial^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\nu$. La forma de las ecuaciones resultantes es igual a (4.10).

Entonces de acuerdo al principio de equivalencia también se puede aplicar esto a un espacio curvo por lo que se cambia $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$, haciendo que la acción sea

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} \quad (4.15)$$

donde se tienen las mismas consideraciones como para el caso de η . Entonces si se elige una métrica en específico, siendo esta la FRW, la ecuación del campo es

$$\ddot{\phi} - a^{-2} \nabla^2 \phi + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (4.16)$$

donde ∇^2 es evaluado con coordenadas comoviles.

Para el caso de un campo homogéneo, la ecuación anterior es reducida a

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (4.17)$$

donde $3H\dot{\phi}$ corresponde al análogo mecánico del término de fricción, cuyos efectos son llamados arrastre o amortiguación de Hubble. Si el término de

arrastre es despreciable, la expansión del universo no tiene un efecto perceptible en la dinámica del campo. Si se tienen varios campos escalares homogéneos se puede expandir la ecuación de la forma

$$\ddot{\phi}_n + 3H\dot{\phi}_n + \frac{\partial V}{\partial \phi_n} = 0. \quad (4.18)$$

Siempre y cuando estos sean campos que no interactúan entre ellos.

4.4. Gravedad a partir del principio de mínima acción

Las ecuaciones de Einstein para el vacío, proviene de aplicar maximizar la acción de Einstein-Hilbert [11]

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} M_{pl}^2 R, \quad (4.19)$$

aplicando el principio de mínima acción variando $g_{\mu\nu}$.

Si se la agrega una componente que consista en un campo escalar que represente a la materia, las ecuaciones corresponden a

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} M_{pl}^2 R + \mathcal{L}_{mat} \right) \quad (4.20)$$

donde \mathcal{L}_{mat} representa la densidad Lagrangiana como se obtuvo para el caso del espacio-tiempo plano, que gracias al principio de equivalencia es igual de válida. Si a esta se hace la variación de $g_{\mu\nu}$, se obtienen las ecuaciones de Einstein con un tensor de energía momento

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_{mat}}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{mat}. \quad (4.21)$$

4.5. Tensor de Energía momento para el campo escalar

A partir de la variación de la componente de materia se puede obtener el tensor de energía momento, si se aplica como esta definido en (4.21), para el

caso de un campo escalar simple. En un espacio-tiempo plano se obtiene [11]

$$T_{\nu}^{\mu} = \partial^{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - \delta_{\nu}^{\mu} \left[\frac{1}{2} \partial^{\alpha} \phi \partial_{\alpha} \phi + V(\phi) \right]. \quad (4.22)$$

Donde la densidad del momento es

$$T_i^0 = \dot{\phi} \partial_i \phi. \quad (4.23)$$

Para un campo homogéneo la densidad del momento es cero, de igual forma es isotrópico. Se asocia a este tensor una densidad y una presión,

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad P = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (4.24)$$

que es una analogía mecánica, para una ρ de la energía de una partícula de masa unitaria, donde el primer término corresponde a su energía cinética. En los términos de relatividad, un campo escalar es supuesto, para diversos casos, como un fluido perfecto debido a que es isotrópico en el marco en reposo local. Sin embargo a diferencia del caso de radiación y materia no se puede escribir una ecuación de estado que relacione P y ρ , ya que la misma energía puede relacionarse con distintos valores de presión, si existen diferencias en la distribución entre los términos cinéticos y potenciales. El potencial $V(\phi)$ se supone que tiene un mínimo en el cual $V = 0$, si se fija en este valor al campo ϕ , para ser una constante, la densidad y la presión son cero. En este mínimo se adopta que el valor corresponde al vacío, donde se le llama el valor de expectación del vacío o *vev*. La denotación de expectación es incluida debido a que el campo posee fluctuaciones cuánticas alrededor del valor clásico.

4.6. Campo escalar como materia oscura

La comprensión de la materia oscura en el universo es un tema de estudio en la cosmología. Una de las propuestas sobre el origen de este tipo de materia en el universo es que puede ser debido a la existencia de un campo escalar. Las observaciones sugieren que el universo es espacialmente plano y que está actualmente acelerado con 95 % de materia desconocida, el 24 % de este es llamada materia oscura y se le atribuye la formación de la estructura a gran escala del universo. Sin embargo a escalas galácticas, en simulaciones

numéricas aparecen ciertas discrepancias entre las predicciones y las observaciones [27]. Para resolver las discrepancias ha propuesto a la materia oscura como un campo escalar [2, 13–17, 20]. Se tiene que a escala cosmológica los resultados del campo escalar es de un comportamiento de materia oscura. Por lo que se presenta como es que un campo escalar puede representar materia oscura fría.

4.7. Oscilaciones de un campo escalar en un universo en expansión

Debido al interés de la descripción de la materia oscura a través de un campo escalar, es importante estudiar la evolución de un campo escalar clásico en el marco cosmológico. Por ahora el caso se va a restringir a una cosmología homogénea e isotrópica y se tratarán de igual forma únicamente cuando la frecuencia de las oscilaciones, es mayor que la tasa de expansión del universo, garantizando que los efectos de evolución del campo sean visibles antes que la evolución del universo pueda disiparlos de forma abrupta.

Considerando la densidad Lagrangiana (4.5) y el tensor de energía momento (4.21), en los modelos en el cual el campos es necesariamente homogéneo su ecuación de movimiento es

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (4.25)$$

donde los puntos denotan derivada con respecto al tiempo y las primas con respecto al campo y $H = \dot{a}/a$ que es la tasa de expansión. La ecuación (4.25) puede ser escrita de una forma mas sugestiva

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right) = -3H\dot{\phi}^2, \quad (4.26a)$$

$$d\rho/dt = -3H(\rho + P), \quad (4.26b)$$

$$d(\rho a^3) = -Pd(a^3), \quad (4.26c)$$

donde $\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V$ y $P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V$. La física detrás de la ecuación (4.26) es, que la densidad de energía del campo escalar ϕ , decrece debido a que la expansión del universo causa un corrimiento al rojo de la parte cinética, $\dot{\phi}^2$. Estas ecuaciones deben de complementarse con la ecuación de Friedmann para H

$$H^2 \equiv (\dot{a}/a)^2 = 8\pi G\rho_T/3 - k/a^2, \quad (4.27)$$

donde ρ_T es la densidad de energía total y k indica el tipo de curvatura.

4.7.1. Evolución de la densidad de energía

Como se menciono anteriormente, sé esta interesado en el caso cuando el campo escalar ϕ oscila alrededor de un mínimo del potencial $V(\phi)$. Donde se asume que existe un mínimo y que en algún momento de su evolución el campo debe oscilar alrededor de él. Considerando que el mínimo de interés coincide con $\phi = 0$.

Conforme ϕ oscila, tenemos de igual forma que ρ es una función que varia lentamente por un tiempo H^{-1} , sin embargo $(\rho + p) = \dot{\phi}^2$ varia rápidamente, cambiando en un tiempo caracterizado por $\omega^{-1} \ll H^{-1}$, en la aproximación que se considera. Se puede expresar la parte cinética del campo como

$$\dot{\phi}^2 = \rho + P = (\gamma + \gamma_p)\rho \quad (4.28)$$

donde γ representa el promedio de $(\rho + p)$ alrededor de una oscilación y γ_p es la parte periódica de $\dot{\phi}^2$. En la cual γ puede ser una función que varia lentamente dependiendo de la forma del potencial. La parte periódica de ϕ cumple para este caso que

$$\int_0^t \gamma_p dt \leq O(\omega^{-1}). \quad (4.29)$$

Entonces si insertamos a (4.28) en la ecuación (4.26), se puede entonces integrar

$$\begin{aligned} d\rho/dt &= -3H(\rho + P) = -3H(\gamma + \gamma_p)\rho \\ d\rho/\rho &= -3\gamma d \ln a - 3H\gamma_p dt \\ \ln(\rho/\rho_0) &= -3 \int_{t_0}^t \gamma d \ln a - 3 \int_{t_0}^t H\gamma_p dt \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde $\rho_0 = \rho(t_0)$. El segundo término en (4.30) se puede integrar por partes y se tiene que es de orden H/ω que en la aproximación utilizada esto es menor la unidad y por lo tanto puede despreciarse con respecto al primer término, lo que significa que cuando el campo oscila más rápido que la expansión del universo, el término de $\dot{\phi}^2$ puede reemplazarse por el valor del promedio de alrededor de una oscilación. Ahora considerado esto, si se asume que el valor γ sea una constante la integración de (4.30) es

$$\rho = \rho_0(a/a_0)^{3\gamma} \quad (4.31)$$

donde $a_0 = a(t_0)$. Si esta densidad de energía es la que domina todo un universo espacialmente plano entonces puede expresarse

$$a(t) \approx t^{2/3\gamma}. \quad (4.32)$$

Ahora es necesario encontrar γ . A partir de (4.28) y con la consideración de que la parte periódica es despreciable considerando que se realiza una integración alrededor de solo un ciclo, podemos escribir a γ como $\gamma = \langle \frac{\dot{\phi}^2}{\rho} \rangle$. Entonces en el límite en consideración, la densidad de energía ρ es apreciable como constante, ya que el decremento o cambio debido al arrastre por la expansión del universo es prácticamente nulo. Por lo que el valor que toma la densidad alrededor de un ciclo es $\rho = V(\phi_{max}) = V_m$. Tomando esto en cuenta se puede escribir una relación entre la diferencial de tiempo y del campo,

$$dt = \frac{d\phi}{\sqrt{2(V_m - V)}}. \quad (4.33)$$

Tomando en cuenta esto es posible encontrar el valor de γ

$$\gamma = \left\langle \frac{\dot{\phi}^2}{\rho} \right\rangle, \quad (4.34)$$

donde $\langle . \rangle$ indica el promedio temporal alrededor de una oscilación, entonces

$$\gamma = \left\langle \frac{\dot{\phi}^2}{\rho} \right\rangle = \left\langle \frac{2(\rho - V)}{\rho} \right\rangle = 2 \left(1 - \frac{\langle V \rangle}{V_m} \right) \quad (4.35)$$

donde se ha considerado que $\rho = V_m$ que es constante para una oscilación. Entonces el promedio de V es

$$\langle V \rangle = \frac{\int V dt}{\int dt} = \frac{\int \frac{V}{\sqrt{2(V_m - V)}} d\phi}{\int \frac{1}{\sqrt{2(V_m - V)}} d\phi}. \quad (4.36)$$

El valor de la cantidad γ , se puede expresar en función del potencial,

$$\gamma = 2 \frac{\int_0^{\phi_{max}} (1 - V/V_m)^{1/2} d\phi}{\int_0^{\phi_{max}} (1 - V/V_m)^{-1/2} d\phi}, \quad (4.37)$$

considerando medio ciclo y asumiendo que el potencial $V(\phi) = V(-\phi)$. El sentido físico de ϕ_{max} , es que representa la amplitud máxima de las oscilaciones, que corresponde al punto donde $\dot{\phi} = 0$. Se define la presión a través de γ como $\langle P \rangle = (\gamma - 1)\rho$, alrededor de una oscilación, considerando siempre que $\omega \gg H$. Para obtener un valor más concreto de γ es necesario proponer un potencial. Con un potencial de la forma

$$V = z\phi^n \quad (4.38)$$

donde z debe tener unidades de $(\text{masa})^{4-n}$. Entonces la ecuación (4.37) se integra considerando el potencial descrito y se tiene que $\gamma = 2n/(n+1)$ entonces obteniendo

$$\rho/\rho_0 = (a/a_0)^{-6n/(n+2)}, \quad (4.39)$$

en el caso de que la densidad de energía domine la evolución del campo $a(t) \approx t^{(n+2)/3n}$.

Si se elige $n = 2$, corresponde a un caso de particular interés ya que es el de un campo escalar masivo con $m^2 = V''(\phi = 0)$, que es el término principal en cualquier expansión de un potencial alrededor de un mínimo. Entonces usando esta consideración tenemos que con $n = 2$, el comportamiento del campos es de materia no relativista con $\gamma = 1$, $\langle P \rangle = (\gamma - 1)\rho = 0$, $\rho \propto a^{-3}$ y $a(t) \propto t^{2/3}$. Para el caso de $n = 4$, se comporta como una componente relativista con $\gamma = \frac{4}{3}$, $\langle P \rangle = \rho/3$, $\rho \propto a^{-4}$ y $a(t) = t^{1/2}$.

4.8. Perturbaciones escalares

Hasta ahora el campo escalar ha sido tratado considerando que es homogéneo e isotrópico, sin embargo como se menciono anteriormente para la formación de estructura en el universo, es necesario la existencia de ciertas perturbaciones que evolucionen para ser lo que hoy observamos como galaxias, cúmulos y los demás tipos de cuerpos estelares. Por ahora se consideraran simplemente hasta el orden lineal ya que este orden es el que se ha revisado y estudiado.

Por conveniencia para el siguiente desarrollo se usara el tiempo conforme, por lo que $d\tau = dt/a$ y el intervalo se describe como [12]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -a(\tau) (d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.40)$$

Entonces las ecuaciones de evolución para una métrica FRW sin perturbar en términos del tiempo conforme son

$$\mathcal{H}^2 = \frac{k_0}{3} a^2 \rho \quad (4.41)$$

$$\ddot{\Phi} + 2 \mathcal{H} \dot{\Phi} + a^2 \frac{dV(\Phi)}{d\Phi} = 0 \quad (4.42)$$

$$\dot{\rho} + 3\mathcal{H}(\rho + p) = 0 \quad (4.43)$$

donde $k_0 = 8\pi G$ y \mathcal{H} el factor conforme de Hubble, los puntos denotan derivada con respecto a τ . La densidad de energía se define como $\rho = (1/2a^2)\dot{\Phi}^2 + V(\Phi)$ y la presión $P = (1/2a^2)\dot{\Phi}^2 - V(\Phi)$.

Para que se de la formación de estructura es necesario que haya perturbaciones tanto en la métrica como en el campo escalar. Para la métrica se tiene que las perturbaciones son las presentadas en la ec. (3.49). El tratamiento que se dará a la solución sera en el espacio de Fourier, definiendo una transformada de la forma

$$f(\vec{r}, t) = (2\pi)^{-3} \int f_k(t) e^{[-i\vec{k}\cdot\vec{r}]} d^3k \quad (4.44)$$

Ahora en la parte del campo, se considera perturbaciones lineales separando la parte homogénea de la perturbada de la forma $\Phi(\tau) \rightarrow \Phi(\tau) + \varphi(k, \tau)$. Entonces para la presión y la densidad de energía, las perturbaciones son

$$\delta\rho = \frac{\partial\rho}{\partial\dot{\Phi}} \delta\dot{\Phi} + \frac{\partial\rho}{\partial\Phi} \delta\Phi \quad (4.45)$$

$$\delta P = \frac{\partial P}{\partial\dot{\Phi}} \delta\dot{\Phi} + \frac{\partial P}{\partial\Phi} \delta\Phi \quad (4.46)$$

se considera que $\delta\Phi = \varphi$ y de igual forma que $\delta\dot{\Phi} = \dot{\varphi}$, entonces podemos escribir las variables perturbadas como

$$\delta\rho = \frac{1}{2a^2} \dot{\Phi} \dot{\varphi} + V' \varphi \quad (4.47)$$

$$\delta P = \frac{1}{2a^2} \dot{\Phi} \dot{\varphi} - V' \varphi. \quad (4.48)$$

Ahora es necesario encontrar cual es la ecuación de de las perturbaciones, considerando solo las de primer orden de la forma $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ donde $\bar{g}_{\mu\nu}$

es la métrica sin perturbar. Con esto y aplicando la variación del Lagrangiano, la ecuación de movimiento es

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - \frac{dV}{d\Phi} = 0. \quad (4.49)$$

El desarrollo solo será hasta primer orden en $g_{\mu\nu}$. El potencial se aproxima a este orden considerando $\phi = \Phi(\tau) + \delta\Phi = \Phi(\tau) + \varphi$ de la forma $V(\phi) = V(\Phi) + \frac{dV(\Phi)}{d\Phi} \varphi$. En tiempo conforme se tiene que la ecuación de movimiento es

$$\ddot{\varphi} + 2\mathcal{H}\dot{\varphi} + \nabla^2 \varphi + a^2 V'' \varphi + \frac{1}{2} \dot{\Phi} \dot{h} = 0, \quad (4.50)$$

donde los primados denotan derivada con respecto al campo no perturbado Φ . Haciendo su transformada de Fourier la ecuación es [16]

$$\ddot{\varphi}_k + 2\mathcal{H}\dot{\varphi}_k + k^2 \varphi_k + a^2 V'' \varphi_k + \frac{1}{2} \dot{\Phi}_k \dot{h}_k = 0. \quad (4.51)$$

Como lo que se desea caracterizar es un campo que represente materia oscura, el potencial se considera como en la ec. (4.38), con un exponente $n = 2$. Cuando el campo ϕ comienza a oscilar, sucede que $V'' = m^2$. Además que se trabaja el límite $m \gg \mathcal{H}$ y los modos $k \ll \sqrt{a^2 V''}$, con esto se garantiza que el campo esté alrededor del mínimo del potencial y no simplemente se comporte como un oscilador. Podemos escribir la ecuación (4.51) como

$$\ddot{\varphi}_k + 2H\dot{\varphi}_k + a^2 m^2 \varphi_k + \frac{1}{2} \dot{\Phi}_k \dot{h}_k = 0 \quad (4.52)$$

La perturbación escalar φ oscila con la misma frecuencia que el campo promedio Φ . Podemos considerar la siguiente cantidad

$$\frac{d(\Phi\dot{\varphi})}{d\tau} = \dot{\Phi}\dot{\varphi} + \Phi\ddot{\varphi}, \quad (4.53)$$

si tomamos su promedio temporal alrededor de una oscilación se encuentra

$$\int_0^{V_{max}} \frac{d(\Phi\dot{\varphi})}{d\tau} d\tau = 0 \quad (4.54)$$

Por lo que esto permite igualar los términos de los productos de las derivadas del campo perturbado y el no perturbado,

$$\langle \dot{\Phi}\dot{\varphi} \rangle = -\langle \Phi\ddot{\varphi} \rangle, \quad (4.55)$$

que más adelante sera de utilidad.

Si se multiplica la ecuación (4.52), por el campo no perturbado Φ ,

$$\Phi_k \ddot{\varphi}_k + 2H\Phi_k \dot{\varphi}_k + a^2 m^2 \Phi_k \varphi_k + \frac{1}{2} \Phi_k \dot{\Phi}_k \dot{h}_k = 0, \quad (4.56)$$

l segundo y cuarto término, son casi constantes durante el tiempo de la oscilación, por lo que se puede realizar un promedio alrededor de una oscilación solo con el primer y tercer término

$$\langle \Phi_k \ddot{\varphi}_k + 2H\Phi_k \dot{\varphi}_k + a^2 m^2 \Phi_k \varphi_k + \frac{1}{2} \Phi_k \dot{\Phi}_k \dot{h}_k \rangle \approx \langle \Phi_k \ddot{\varphi}_k + a^2 m^2 \Phi_k \varphi_k \rangle \approx 0, \quad (4.57)$$

entonces se puede aproximar al promedio del potencial

$$\langle \Phi_k \ddot{\varphi}_k \rangle \approx -\langle a^2 m^2 \Phi_k \varphi_k \rangle = -\langle a^2 V' \varphi_k \rangle \quad (4.58)$$

por lo que si consideramos ahora el resultado de la ec. (4.55), se tiene la relación

$$\langle \dot{\Phi}_k \dot{\varphi}_k \rangle \approx \langle a^2 V' \varphi_k \rangle, \quad (4.59)$$

podemos utilizarlo para encontrar que alrededor de una oscilación la perturbación en la presión es cero,

$$\frac{\langle \delta P \rangle}{\langle \delta \rho \rangle} = \frac{\langle \dot{\Phi}_k \dot{\varphi}_k \rangle - \langle a^2 V' \varphi_k \rangle}{\langle \dot{\Phi}_k \dot{\varphi}_k \rangle + \langle a^2 V' \varphi_k \rangle} \approx 0, \quad (4.60)$$

similar como cuando se considera la materia oscura fría.

Es conveniente reescribir la ecuación (4.52), ya que el tratamiento es valido para cualquier k dentro del limite en consideración. Se desprecia el subíndice por el momento. Multiplicando por el valor de la derivada del campo sin perturbar y dividiendo entre a^2

$$\frac{\dot{\Phi}}{a^2} \left(\ddot{\varphi} + 2H\dot{\varphi} + a^2 m^2 \varphi + \frac{1}{2} \dot{\Phi} \dot{h} \right) = 0, \quad (4.61)$$

entonces utilizando las ecuaciones no perturbadas, podemos reescribir como

$$\delta \dot{\rho} + 6 \frac{\mathcal{H}}{a^2} \dot{\Phi} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\Phi}}{a^2} \dot{h} = 0. \quad (4.62)$$

Es posible considerar a (4.28), ya que se tratan de los valores medios en una oscilación, y reescribirla como

$$\dot{\delta} - 3\mathcal{H}\delta \left(1 + \frac{\langle P \rangle}{\langle \rho \rangle}\right) + 3\mathcal{H}\delta \left(1 + \frac{\langle \delta P \rangle}{\langle \delta \rho \rangle}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\langle P \rangle}{\langle \rho \rangle}\right) \dot{h} = 0, \quad (4.63)$$

esto se puede simplificar y obtenerlo de la forma

$$\dot{\delta} + 3H\delta \left(\frac{\langle \delta P \rangle}{\langle \delta \rho \rangle} - \frac{\langle P \rangle}{\langle \rho \rangle}\right) = \left(1 + \frac{\langle P \rangle}{\langle \rho \rangle}\right) \frac{\dot{h}}{2}, \quad (4.64)$$

que permite utilizar el resultado de (4.60) y que $n = 2$ en el potencial, lo que resulta en $\langle P \rangle = (\gamma - 1)\rho = 0$ y se recupera que

$$\delta = -\frac{h}{2} = \delta_{CDM}. \quad (4.65)$$

Con esto se tiene que durante la oscilación en el mínimo del potencial el comportamiento del campo escalar es el adecuado para representar materia oscura, al igual que el de las perturbaciones. Esto es siempre que se consideren modos, $k \ll \sqrt{a^2 V''}$ [4], para cualquier modo que sea superior a este límite no se puede garantizar, que su comportamiento sea el de materia oscura fría a través del tratamiento realizado.

Capítulo 5

Métodos Numéricos

El análisis numérico es una herramienta, que actualmente es muy utilizada ya que permite resolver problemas que de otra forma no sería posibles de resolver. Se presenta como es que a través de este tipo de herramienta se puede plantear un código capaz de encontrar soluciones completas para un campo escalar interactuante incluyendo perturbaciones en la parte espacial de la métrica.

5.1. Aproximaciones en diferencias finitas

En la actualidad, el cómputo paralelo de alto desempeño es una herramienta indispensable en modelar sistemas complejos relacionados con diferentes campos de la ciencia. Lo que significa que el uso óptimo de las herramientas computacionales utilizando los conocimientos, aplicados en la solución de problemas del área de interés. [3].

Cuando se estudia un campo en un espacio-tiempo se ve en la necesidad de considerar un número indeterminado de variables desconocidas, que corresponde a los valores que puede asumir el campo en todo punto del espacio y a todo tiempo. Para poder encontrar estos valores en una aproximación numérica, es necesario reducir el número de variables a una cantidad finita y determinado. Un enfoque es tomando diferencias y elementos finitos, donde se reduce el número de variables discretizando el dominio de dependencia de las funciones [3, 22]. La idea básica de las diferencias finitas es substituir al espacio-tiempo continuo por un conjunto discreto de puntos. Este conjunto de puntos se conoce como la “malla” o “red” computacional. Las distancias

en el espacio entre los puntos de esta red no tienen por qué ser uniformes, pero se asumirá que sí lo son. El paso del tiempo entre dos niveles consecutivos se denomina Δt , y la distancia entre dos puntos adyacentes en el espacio Δx , se puede ver la idea para una dimensión en la figura 5.1.

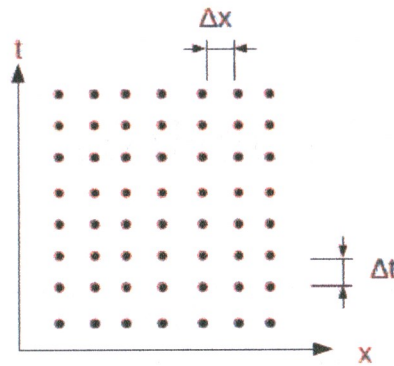


Figura 5.1: Discretización del espacio-tiempo en diferencias finitas en una dimensión, donde cada uno de los valores continuos que posee el espacio son traducidos en puntos finitos, que se pueden incrementar hasta hacer una buena aproximación a su equivalente en el espacio-tiempo continuo.

Una vez establecida la malla computacional, es necesario hacer una discretización de las ecuaciones a resolver, donde se realizara la transformación de las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas, de forma que se tenga que los operadores diferenciales sean reemplazados por su equivalencia en diferencias finitas entre cada punto adyacente de la malla. El resultado de esto es que se obtienen ecuaciones algebraicas a resolver por cada punto en la malla, obteniendo muchas ecuaciones algebraicas a resolver, por lo cual se utiliza una computadora.

5.2. Discretización de las ecuaciones de movimiento

A continuación se hará un resumen breve sobre la teoría de discretización en la malla y de la transformación discreta de Fourier para está [3, 7, 22].

Tomando tres dimensiones, despreciando el índice temporal, y considerando condiciones periódicas de frontera o PBC por las siglas de Periodic

Boundary Condition.

$$f_{i_1+n, i_2, i_3} = f_{i_1, i_2+n, i_3} = f_{i_1, i_2, i_3+n} = f_{i_1, i_2, i_3} \quad (5.1)$$

donde n es un numero fijo que representa la resolución de la simulación; además f representa cualquier cantidad física que se estudie sea escalar, vectorial, la métrica, etc. Como ya se menciono gracias a la PBC, solo se necesita evolucionar f_{i_1, i_2, i_3} en una caja cubica fundamental conteniendo n^3 puntos de $-n/2 < i_1, i_2, i_3 \leq n/2$. Empezaremos usando la definición de la transformada discreta de Fourier o DFT por sus siglas en ingles [22]

$$\tilde{f}_{j_1, j_2, j_3} \equiv \sum_{lattice} e^{\frac{2\pi i}{n}(i_1 j_1 + i_2 j_2 + i_3 j_3)} f_{i_1, i_2, i_3}, \quad (5.2)$$

donde $\sum_{lattice}$ es la suma sobre toda la malla, i es la unidad imaginaria y los subíndices j_1, j_2, j_3 son números enteros. A menos que se indique lo contrario, la tilde indica las variables en el espacio de Fourier. En el espacio de Fourier también se satisface la PBC.

5.3. HLattice

Un elemento que se ha hecho estándar en la cosmología moderna es el uso de códigos computacionales para realizar simulaciones de la evolución del universo temprano. Por ejemplo hay diversos códigos que estudian la inflación del universo temprano, cuando el universo tuvo una fase de expansión acelerada, en el cual escenario más simple es cuando lo realiza un campo escalar. Por lo que es importante estudiar y comprender la dinámica de los campos escalares en un universo FRW, en la mayoría de los casos los campos son homogéneos. Existe una cantidad de códigos que realizan esto tales como LATTICEEASY, DEFROST, CUDAEASY, etc. Sin embargo estos consideran que el espacio es en esencia homogéneo, lo cual en principio no es totalmente cierto por lo menos hasta una determinada aproximación. HLattice es un código que realiza la evolución de los campos en un universo FRW perturbado además que analiza el comportamiento de las ondas gravitacionales y su interacción durante el preheating.

5.3.1. Perturbación de la métrica

La norma en la que se trabaja es la síncrona y nuevamente presentamos el elemento de línea, quedando descrito (3.49). Con esto se tiene la descripción de h . Entonces considerando un sistema que contiene m campos escalares canónicos, $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_m$ con un potencial $V(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_m)$. Se tiene una acción

$$S = \int \sqrt{g} d^4x \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \phi_l \partial_\mu \phi_l - V + \frac{M_p^2}{2} R \right) \quad (5.3)$$

donde $g \equiv |\det g_{\mu\nu}|$, $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo, M_p es la masa reducida de Planck, relacionada con la constante gravitacional de Newton G_N via $M_p \equiv 1/\sqrt{8\pi G_N}$; R es el escalar de Ricci. Entonces reescribiendo el elemento de línea de la norma síncrona de la forma [12]

$$ds^2 = dt^2 - g_{ij} dx^i dx^j, \quad (5.4)$$

las unidades naturales $c = \hbar = 1$ son usadas dentro del código. Con esto se tiene un universo en expansión y espacialmente plano, donde la métrica es g_{ij} , quedando descrita como

$$g_{ij} = a(t)^2 (\delta_{ij} + h_{ij}) \quad (5.5)$$

Si suponemos que se trabaja en un volumen finito L^3 , el factor de escala es definido como

$$a(t) \equiv \left(\frac{1}{L^3} \int \sqrt{g} d^3x \right)^{1/2} \quad (5.6)$$

y el parámetro de Hubble es el acostumbrado, $H = \frac{\dot{a}}{a}$, donde los puntos indican la derivada con respecto al tiempo t . Si se considera que hay una interacción gravitacional débil con la condición $|h_{ij}| \ll 1$, entonces en HLattice se elige utilizar la siguiente variable

$$\beta_{ij} \equiv (\ln G)_{ij} \quad (5.7)$$

donde G es la matriz 3×3 de g_{ij} . Entonces la matriz función $(\ln G)$ se expande de la forma

$$\ln G \equiv 2I \ln a + (a^2 G - I) - \frac{1}{2} (a^2 G - I)^2 + \frac{1}{3} (a^2 G - I)^3 - \dots \quad (5.8)$$

donde I es la matriz identidad 3×3 , si se considera a orden lineal

$$\begin{aligned}\ln G &\approx 2I \ln a + (a^2 G - I) \\ \ln g_{ij} &\approx 2\delta_{ij} \ln a + h_{ij} \\ h_{ij} &\approx \beta_{ij} - 2\delta_{ij} \ln a\end{aligned}\quad (5.9)$$

Con lo cual obtenemos la parte sin traza de β_{ij}

$$\gamma_{ij} \equiv \beta_{ij} - \frac{\beta}{3}\delta_{ij} = 2\delta_{ij} \ln a + h_{ij} - \frac{6 \ln a + h}{3}\delta_{ij} = h_{ij} - \frac{h}{3}\delta_{ij} + O(h_{ij}^2) \quad (5.10)$$

Lo que implica que $O(\gamma_{ij}^n) \lesssim O(h_{ij}^n)$ para un orden $n \geq 0$. Solo es necesario utilizar la expansión de h_{ij} y reemplazar β_{ij} con $\frac{\beta}{3}\delta_{ij} + \gamma_{ij}$, cortando la expansión de Taylor en el orden correcto. También se puede calcular \sqrt{g} , usando el hecho de que $\det(G) \equiv e^{\text{Tr}(\ln G)}$ obteniendo una expresión exacta y simple:

$$\sqrt{g} = e^{\beta/2}, \quad (5.11)$$

donde $\beta = \beta_{ii}$ es la traza de β_{ij} . Escribiendo la matriz 3×3 de γ_{ij} como Γ , se puede reescribir la matriz de g_{ij}

$$G = e^{\frac{\beta}{3}I + \Gamma} = e^{\beta/3} \left(1 + \Gamma + \frac{1}{2}\Gamma^2 + \frac{1}{6}\Gamma^3 + \dots \right), \quad (5.12)$$

si se toma la inversa de G en términos de Γ y β

$$g^{ij} = e^{-\frac{\beta}{3}} \left(\delta_{ij} - \gamma_{ij} + \frac{1}{2}\gamma_{ik}\gamma_{kj} \right) + O(h_{ij}^3). \quad (5.13)$$

Para hacer la aproximación se pueden hacer ciertas sustituciones, por ejemplo la que hace HLattice ignorando los términos $O(h_{ij}^3)$ considerando que $h_{ij} \ll 1$, es

$$e^{-\gamma_{11}} = e^{-\frac{\beta}{3}} \left(1 - \gamma_{11} + \frac{1}{2}\gamma_{11}^2 \right), \quad (5.14)$$

se puede tomar este tipo de expansiones y obtener

$$\begin{aligned}g^{11} &\approx e^{-\beta_{11}} + \frac{e^{2\beta_{11}/3}}{2} (\beta_{12}^2 e^{-\beta_{22}/3} + \beta_{13}^2 e^{-\beta_{33}/3}), \\ g^{22} &\approx e^{-\beta_{22}} + \frac{e^{2\beta_{22}/3}}{2} (\beta_{23}^2 e^{-\beta_{33}/3} + \beta_{21}^2 e^{-\beta_{11}/3}), \\ g^{33} &\approx e^{-\beta_{33}} + \frac{e^{2\beta_{33}/3}}{2} (\beta_{31}^2 e^{-\beta_{11}/3} + \beta_{32}^2 e^{-\beta_{22}/3}).\end{aligned}\quad (5.15)$$

Para la parte que se encuentra fuera de la traza, si utilizamos la ecuación (5.13), se tiene la siguiente aproximación

$$g^{23} \approx e^{-\frac{\beta}{3}} \left(-\gamma_{23} + \frac{1}{2}\gamma_{21}\gamma_{13} + \frac{1}{2}\gamma_{22}\gamma_{23} + \frac{1}{2}\gamma_{23}\gamma_{33} \right), \quad (5.16)$$

sustituyendo γ_{ij} por β_{ij} , puede expresarse

$$g^{23} \approx e^{-\frac{\beta}{3}} \left(-\beta_{23} + \frac{1}{2}\beta_{21}\beta_{13} + \frac{1}{2}(\beta_{22} - \frac{\beta}{3})\gamma_{23} + \frac{1}{2}\gamma_{23}(\beta_{33} - \frac{\beta}{3}) \right), \quad (5.17)$$

acomodando los términos de la expresión

$$g^{23} \approx e^{-\frac{\beta}{3}} \left(-\beta_{23} \left[1 - \frac{1}{2}(\beta_{22} + \beta_{33}) + \frac{\beta}{3} \right] + \frac{1}{2}\beta_{21}\beta_{13} \right), \quad (5.18)$$

sólo se toman en cuenta ordenes hasta $O(h_{ij}^3)$. Se puede tomar una aproximación

$$e^{-(\beta_{22} + \beta_{33})/2 + \frac{\beta}{3}} \approx 1 - \frac{1}{2}(\beta_{22} + \beta_{33}) + \frac{\beta}{3} \quad (5.19)$$

obteniendo una expresión mas reducida. Los demás componentes que se encuentran fuera de la traza son deducidos de una forma similar,

$$\begin{aligned} g^{23} &\approx \left(-\beta_{23}e^{-(\beta_{22} + \beta_{33})/2} + \frac{1}{2}\beta_{12}\beta_{31}e^{-\frac{\beta}{3}} \right), \\ g^{31} &\approx \left(-\beta_{31}e^{-(\beta_{33} + \beta_{11})/2} + \frac{1}{2}\beta_{23}\beta_{12}e^{-\frac{\beta}{3}} \right), \\ g^{12} &\approx \left(-\beta_{12}e^{-(\beta_{11} + \beta_{22})/2} + \frac{1}{2}\beta_{31}\beta_{23}e^{-\frac{\beta}{3}} \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Estos desarrollos son elegidos por su simplicidad y que tienen un error de $O(h_{ij}^3)$, de igual forma son invariantes ante una transformación de coordenadas $x^i \rightarrow Cx^i$, sin embargo no son únicos y pueden realizarse a mayor orden en la expansión. En HLattice, después de ciertos pasos de una evolución se realiza una transformación de este tipo donde la métrica transformaría como $\beta_{ij} \rightarrow \beta_{ij} - 2\delta \ln C$, donde C es elegido de tal forma que sea el factor de escala en ese instante, después la transformación el factor de escala se redefine,

$$e^\beta = e^{2\delta_{ij} \ln a(t_0)} e^{\beta_{ij}(t) - 2\delta_{ij} \ln a(t_0)}, \quad (5.21)$$

ya que la cantidad $|\beta_{ij}(t) - 2\delta_{ij} \ln a(t_0)|$ para una $t \approx t_0$ es una cantidad pequeña. Gracias a la definición del factor de escala HLattice usa una aproximación para la exponencial que permite reducir a la mitad el tiempo el computo,

$$e^x \approx \left(\left[\left(\left(\sum_{s=0}^6 \frac{(x/16)^s}{s!} \right)^2 \right)^2 \right]^2 \right)^2. \quad (5.22)$$

reduciendo una simulación de que podría tomar 60 minutos a 30 minutos. Entonces con esto ya es posible utilizar estas definiciones en la acción (5.3), y escribirla como

$$S = \int dt (K_f - G_f - V_f + K_g - G_g), \quad (5.23)$$

donde K_f es la energía cinética del campo escalar

$$K_f = \int e^{\beta/2} d^3x \frac{1}{2} \dot{\phi}_l^2, \quad (5.24)$$

G_f es el gradiente de energía de los campos escalares

$$G_f = \int e^{\beta/2} d^3x \frac{1}{2} g^{ij} \partial_i \phi_l \partial_j \phi_l, \quad (5.25)$$

V_f es el potencial de energía del campo escalar

$$V_f = \int e^{\beta/2} d^3x V(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_m), \quad (5.26)$$

K_g es la “energía cinética” de la gravedad, aproximado a segundo orden en h_{ij}

$$K_g \approx \frac{M_p^2}{4} \int e^{\beta/2} d^3x (\dot{\beta}_{23}^2 + \dot{\beta}_{31}^2 + \dot{\beta}_{12}^2 - \dot{\beta}_{11}\dot{\beta}_{22} - \dot{\beta}_{22}\dot{\beta}_{33} - \dot{\beta}_{33}\dot{\beta}_{11}), \quad (5.27)$$

G_g es el “gradiente de energía” de gravedad igualmente aproximado

$$\begin{aligned} G_g \approx & \frac{M_p^2}{4} a(t) \int d^3x (\beta_{23,1}^2 + \beta_{31,2}^2 + \beta_{12,3}^2 - 2\beta_{23,1}\beta_{31,2} - 2\beta_{31,2}\beta_{12,3} \\ & - 2\beta_{12,3}\beta_{23,1} - \beta_{22,1}\beta_{33,1} - \beta_{33,2}\beta_{11,2} - \beta_{11,3}\beta_{22,3} - 2\beta_{23,2}\beta_{11,3} \\ & + 2\beta_{31,3}\beta_{22,1} + 2\beta_{12,1}\beta_{33,2}), \end{aligned} \quad (5.28)$$

donde $\beta_{ij,k} \equiv \partial_k \beta_{ij}$. El volumen global $e^{\beta/6}$, se aproxima con un factor de escala global $a(t)$, gracias a que la parte integrante de la ecuación (5.28) es de segundo orden en h_{ij} . Esta aproximación hace que HLattice sea incapaz de capturar la autointeracción gravitacional que en escalas pequeñas puede ser importante. En [7] se pueden observar las diferentes definiciones del programa.

5.3.2. Integrador híbrido Simpléctico-Runge Kutta

HLattice utiliza para la evolución temporal un integrador Symplectico. En las referencias [5, 6, 23] se encuentran descritos los principios de este tipo de integradores.

Tomando el Hamiltoniano de la forma $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = K(\mathbf{p}) + P(\mathbf{q})$, si se tiene una función arbitraria $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ puede evolucionarse

$$\frac{df}{dt} = \mathbf{H}f, \quad (5.29)$$

el operador es definido como

$$\mathbf{H}f \equiv \{f, H\}, \quad (5.30)$$

con $\{\cdot, \cdot\}$ siendo los corchetes de Poisson. De igual forma se puede definir $\mathbf{K} \equiv \{\cdot, K\}$ y $\mathbf{P} \equiv \{\cdot, P\}$. Donde $\mathbf{H} = \mathbf{K} + \mathbf{P}$ y \mathbf{K}, \mathbf{P} no conmutan. La solución cuando se avanza un tiempo dt es escrita como

$$f(t + dt) = e^{\mathbf{H}dt} f(t). \quad (5.31)$$

El integrador es aplicado a través de un método de separación, descrito en el en [6]. Entonces para aplicar el integrador, se tiene que discretizar la acción. Para el momento conjugado de ϕ_l y β_l se tiene respectivamente:

$$\Pi_{\phi_l}|_{i_1, i_2, i_3} = e^{\beta/2} \dot{\phi}_l|_{i_1, i_2, i_3}, \quad (5.32)$$

$$\Pi_{\beta_{ij}}|_{i_1, i_2, i_3} = \frac{M_p^2}{4} e^{\beta/2} (2 - \delta_{ij}) \left(\dot{\beta}_{ij} - \dot{\beta} \delta_{ij} \right) \Big|_{i_1, i_2, i_3}, \quad (5.33)$$

se puede para escribir el Hamiltoniano del sistema de la forma

$$H = K_1 + K_2 + P, \quad (5.34)$$

K_1 es la energía cinética del campo escalar y la suma fuera de la diagonal de los términos cinéticos de la gravedad,

$$K_1 = \sum_{\text{malla}} e^{\beta/2} \left[\frac{\Pi_{\phi_l}^2}{2} + \frac{1}{M_p^2} (\Pi_{\beta_{23}}^2 + \Pi_{\beta_{31}}^2 + \Pi_{\beta_{12}}^2) \right]. \quad (5.35)$$

K_2 es la suma de los términos de la diagonal de los términos cinéticos de la gravedad,

$$K_2 = \frac{1}{M_p^2} \sum_{\text{malla}} e^{\beta/2} \left[2 \sum_{i=1}^3 \Pi_{\beta_{ii}}^2 + \left(\sum_{i=1}^3 \Pi_{\beta_{ii}} \right)^2 \right]. \quad (5.36)$$

y por ultimo P es la suma de todos los términos de gradiente y potencial

$$\begin{aligned} P = & \sum_{\text{malla}} e^{\beta/2} \left[V(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_m) + \frac{1}{2} g^i j \partial_i \phi_l \partial_j \phi_l \right] \\ & + \frac{M_p^2}{4n} \left(\sum_{\text{malla}} e^{\beta/2} \right)^{1/3} \left[\sum_{\text{malla}} (\beta_{23,1}^2 + \beta_{31,2}^2 + \beta_{12,3}^2 \right. \\ & - 2\beta_{23,1}\beta_{31,2} - 2\beta_{31,2}\beta_{12,3} - 2\beta_{12,3}\beta_{23,1} - \beta_{22,1}\beta_{33,1} \\ & - \beta_{33,2}\beta_{11,2} - \beta_{11,3}\beta_{22,3} - 2\beta_{23,2}\beta_{11,3} \\ & \left. + 2\beta_{31,3}\beta_{22,1} + 2\beta_{12,1}\beta_{33,2} \right]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

sin embargo los integradores symplecticos tradicionales no pueden usarse directamente debido a que contiene 3 operadores no conmutativos en lugar de los 2 términos tradicionales, además de que el termino K_2 es no canónico. En su lugar se utiliza una factorización distinta de la forma [7]

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}} = & e^{c_3 \mathbf{A} dt/2} e^{c_3 \mathbf{B} dt/2} e^{c_3 \mathbf{C} dt} e^{c_3 \mathbf{B} dt/2} e^{(c_3+c_2) \mathbf{A} dt/2} \\ & e^{c_2 \mathbf{A} dt/2} e^{c_2 \mathbf{B} dt/2} e^{c_2 \mathbf{C} dt} e^{c_2 \mathbf{B} dt/2} e^{(c_2+c_1) \mathbf{A} dt/2} \\ & e^{c_1 \mathbf{A} dt/2} e^{c_1 \mathbf{B} dt/2} e^{c_1 \mathbf{C} dt} e^{c_1 \mathbf{B} dt/2} e^{(c_1+c_0) \mathbf{A} dt/2} \\ & e^{c_0 \mathbf{A} dt/2} e^{c_0 \mathbf{B} dt/2} e^{c_0 \mathbf{C} dt} e^{c_0 \mathbf{B} dt/2} e^{(c_0+c_1) \mathbf{A} dt/2} \\ & e^{c_1 \mathbf{A} dt/2} e^{c_1 \mathbf{B} dt/2} e^{c_1 \mathbf{C} dt} e^{c_1 \mathbf{B} dt/2} e^{(c_1+c_2) \mathbf{A} dt/2} \\ & e^{c_2 \mathbf{A} dt/2} e^{c_2 \mathbf{B} dt/2} e^{c_2 \mathbf{C} dt} e^{c_2 \mathbf{B} dt/2} e^{(c_2+c_3) \mathbf{A} dt/2} \\ & e^{c_3 \mathbf{A} dt/2} e^{c_3 \mathbf{B} dt/2} e^{c_3 \mathbf{C} dt} e^{c_3 \mathbf{B} dt/2} e^{\mathbf{A} dt/2} \\ & + O(dt^7) \end{aligned} \quad (5.38)$$

donde

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -1.17767998417887, \\
 c_2 &= 0.235573213359357, \\
 c_3 &= 0.784513610477560, \\
 c_0 &= 1 - 2(c_1 + c_2 + c_3),
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

este es el esquema que HLattice utiliza para resolver el sistema. A continuación se describen los operadores K_1 y K_2 , pero no P ya que es demasiado grande, por lo que se hace referencia al código, donde lo utilizan como etiquetas del preprocesador. Para el término K_1 entonces

$$e^{\mathbf{K}_1 dt} \begin{pmatrix} \phi_l |_{i_1, i_2, i_3} \\ \Pi_{\phi_l} |_{i_1, i_2, i_3} \\ \beta_{11} |_{i_1, i_2, i_3} \\ \beta_{22} |_{i_1, i_2, i_3} \\ \beta_{33} |_{i_1, i_2, i_3} \\ \beta_{23} |_{i_1, i_2, i_3} \\ \beta_{31} |_{i_1, i_2, i_3} \\ \beta_{12} |_{i_1, i_2, i_3} \\ \Pi_{\beta_{11}} |_{i_1, i_2, i_3} \\ \Pi_{\beta_{22}} |_{i_1, i_2, i_3} \\ \Pi_{\beta_{33}} |_{i_1, i_2, i_3} \\ \Pi_{\beta_{23}} |_{i_1, i_2, i_3} \\ \Pi_{\beta_{31}} |_{i_1, i_2, i_3} \\ \Pi_{\beta_{12}} |_{i_1, i_2, i_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\phi_l + e^{-\beta/2} \Pi_{\phi_l} dt) |_{i_1, i_2, i_3} \\ \Pi_{\phi_l} |_{i_1, i_2, i_3} \\ \beta_{11} |_{i_1, i_2, i_3} \\ \beta_{22} |_{i_1, i_2, i_3} \\ \beta_{33} |_{i_1, i_2, i_3} \\ \left(\beta_{23} + \frac{2e^{-\beta/2}}{M_p^2} \Pi_{\beta_{23}} dt \right) |_{i_1, i_2, i_3} \\ \left(\beta_{31} + \frac{2e^{-\beta/2}}{M_p^2} \Pi_{\beta_{31}} dt \right) |_{i_1, i_2, i_3} \\ \left(\beta_{12} + \frac{2e^{-\beta/2}}{M_p^2} \Pi_{\beta_{12}} dt \right) |_{i_1, i_2, i_3} \\ \Pi_{\beta_{11}} + \frac{K_1}{2} dt |_{i_1, i_2, i_3} \\ \Pi_{\beta_{22}} + \frac{K_1}{2} dt |_{i_1, i_2, i_3} \\ \Pi_{\beta_{33}} + \frac{K_1}{2} dt |_{i_1, i_2, i_3} \\ \Pi_{\beta_{23}} |_{i_1, i_2, i_3} \\ \Pi_{\beta_{31}} |_{i_1, i_2, i_3} \\ \Pi_{\beta_{12}} |_{i_1, i_2, i_3} \end{pmatrix} \tag{5.40}$$

Debido a que las cantidades necesarias para la evolución son invariantes en esta operación el algoritmo aplicado a una dt finita puede ser empleado sin ambigüedad. Para el caso del operador \mathbf{K}_2 se tiene lo siguiente,

$$e^{\mathbf{K}_2 dt} \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{33} \\ \Pi_{\beta_{11}} \\ \Pi_{\beta_{22}} \\ \Pi_{\beta_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} + \frac{2e^{-\beta/2}}{M_p^2} (\Pi_{\beta_{11}} - \Pi_{\beta_{22}} - \Pi_{\beta_{33}}) dt \\ \beta_{22} + \frac{2e^{-\beta/2}}{M_p^2} (\Pi_{\beta_{22}} - \Pi_{\beta_{11}} - \Pi_{\beta_{33}}) dt \\ \beta_{33} + \frac{2e^{-\beta/2}}{M_p^2} (\Pi_{\beta_{33}} - \Pi_{\beta_{22}} - \Pi_{\beta_{11}}) dt \\ \Pi_{\beta_{11}} + \frac{K_2}{2} dt \\ \Pi_{\beta_{22}} + \frac{K_2}{2} dt \\ \Pi_{\beta_{33}} + \frac{K_2}{2} dt \end{pmatrix} \tag{5.41}$$

Debido a la no canonicidad de este término, la solución exacta no es posible de alcanzar, ya que los términos del lado derecho de la ecuación son términos dinámicos. Para poder encontrar la solución HLattice utiliza un sub-integrador Runge kuta de 4 orden, donde el término dt' para este integrador es menor que el dt general. El sub-integrador no cuesta memoria extra debido a que es local en la operación, resolviendo solo n^3 conjuntos independientes de 6 ODE acopladas, ya que no interactúan puntos de la malla entre sí, a diferencia de un integrador global con lo que tendrían que resolverse $6n^3$ ODE acopladas, lo cual sería más costoso. En HLattice como $dt' \ll dt$, el error de $O(dt'^5)$ del sub-integrador Runge kutta no estropea la precisión de $O(dt^7)$ del integrador global.

Capítulo 6

Resultados numéricos para un campo escalar de materia oscura

Hasta el momento se ha estado desarrollando la teoría sobre la evolución de un campo escalar en el marco de la cosmología, la formación de estructura y materia oscura, incluyendo conceptos claves comprensión adecuada de la física involucrada en este tipo de análisis. Otro punto importante es en cuanto al análisis de las perturbaciones se ha considerado simplemente una aproximación a primer orden en las componentes espaciales de la métrica y del campo escalar. Las perturbaciones deben ser pequeñas en el universo temprano para no arruinar la isotropía que se presenta a gran escala.

A continuación se presentara el desglose y detalle sobre como se evoluciona un campo escalar que representa materia oscura fría o cold dark matter y su evolución temporal, resolviendo las ecuaciones espacialmente en todas las dimensiones, manteniéndose dentro del régimen lineal en la perturbación sin tomar aproximaciones de densidad o presión y como es que reproduce de forma cualitativa el comportamiento esperado para la formación de estructura que se ha presentado en lo capítulos anteriores.

6.1. Definiciones

Lo primero que hay que describir, algo a lo cual no se le ha dado mucha importancia durante los capítulos anteriores, es la forma en que el promedio

del universo, describe la parte homogénea. Como este debe de ser implementado en las ecuaciones adecuadamente. Hasta el momento se ha usado de considerado que el promedio espacial \bar{A} y $\langle A \rangle$ representan la misma cantidad, sin embargo esto no es así, en general $\bar{A} \neq \langle A \rangle$. A continuación se presenta cómo es que estas 2 cantidades se definen para la situación y en cuales casos se pueden considerar iguales.

Cuando se tiene un espacio plano el promedio espacial es definido como

$$\bar{A}(t) \equiv \frac{1}{V} \int A(t, \vec{x}) d^3x, \quad (6.1)$$

donde $V = \int d^3x$.

Definimos de igual forma, el promedio alrededor del espacio cuando este posee una curvatura como la media ponderada, a diferencia del caso plano que es simplemente la media aritmética. La definición para este caso es

$$\langle A \rangle \equiv \frac{1}{V_g} \int \sqrt{g} A(t, \vec{x}) d^3x, \quad (6.2)$$

donde $V_g \equiv a^3 V = \int \sqrt{g} d^3x$, g siendo así la ponderación del espacio, representada por el determinante de la métrica en esa posición. Como se trabaja en una red cubica, es necesario expresarlo de forma discreta

$$\bar{A} = \frac{1}{V} \sum_{i,j,k} A_{i,j,k}, \quad (6.3)$$

$$\langle A \rangle = \frac{1}{V_g} \sum_{i,j,k} \sqrt{g_{i,j,k}} A_{i,j,k} \quad (6.4)$$

ahora $V = n^3$ y $V_g = a^3 n^3$, siendo n el tamaño de puntos por lado de la red cubica. Aquí se ha tomado en cuenta la definición (5.6).

Es importante remarcar esto ya que al tomar las cantidades es necesario definir las correctamente para que al resolverlas nos proporcionen los valores adecuados. Para demostrarlo tomemos la definición de HLattice para la raíz de el determinante de la métrica

$$\sqrt{g} = e^{\beta/2}, \quad (6.5)$$

$\beta \approx h + 6 \ln a$ cuando es considerado hasta orden lineal, con $h_{ii} = h$ siendo la traza de la perturbación. Utilizando esto es posible escribir la ecuación en

términos de una expansión en h ,

$$\sqrt{g} = a^3 e^{h/2} = a^3 \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + \mathcal{O}(h^3) \right) \quad (6.6)$$

Como h es una cantidad pequeña, considerando la expresión 6.6 hasta segundo orden será suficiente para la demostración. Realizando el promedio espacial en espacio curvo, considerando una cantidad arbitraria:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \frac{1}{V_g} \int A a^3 \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} \right) dx^3 \\ &= \frac{a^3}{V_g} \int A dx^3 + \int A \frac{h}{2} dx^3 + \int A \frac{h^2}{4} dx^3, \end{aligned} \quad (6.7)$$

en la cual se identifica el volumen como $V_g = a^3 V$. Si se reescribe de forma adecuada la expresión se tendrá que el promedio del espacio plano es el término de orden cero para el caso con curvatura,

$$\langle A \rangle = \bar{A} + \frac{1}{V} \int A \frac{h}{2} dx^3 + \frac{1}{V} \int A \frac{h^2}{4} dx^3, \quad (6.8)$$

si se toma en cuenta que se realiza un promedio, sobre una cantidad relativamente grande y considerando que $h \ll 1$, entonces para este caso se puede aproximar $\langle A \rangle \approx \bar{A}$.

Sin embargo, esto no es válido para cualquier cantidad ya que si consideramos, por ejemplo,

$$\delta A \equiv A - \langle A \rangle, \quad (6.9)$$

y se expande el promedio según la ec. (6.8),

$$\delta A = A - \frac{1}{V} \int A dx^3 - \frac{1}{V} \int A \frac{h}{2} dx^3 - \frac{1}{V} \int A \frac{h^2}{4} dx^3, \quad (6.10)$$

considerando que A es una cantidad grande entonces se puede volver a realizar la aproximación $A - \langle A \rangle \approx A - \bar{A}$. Pero si se realiza el promedio de la cantidad, $\langle \delta A \rangle$, esto ya no es válido, debido a que el orden de $\delta A \approx h$,

$$\begin{aligned} \langle \delta A \rangle &= \frac{1}{V} \int \delta A dx^3 + \frac{1}{V} \int \delta A \frac{h}{2} dx^3 + \frac{1}{V} \int \delta A \frac{h^2}{4} dx^3 \\ &= \bar{\delta A} + \frac{1}{V} \int (A - \bar{A}) \frac{h}{2} dx^3 + \vartheta(h^2) \\ &= \bar{\delta A} - \frac{\bar{A} \bar{h}}{2} + \frac{\overline{A h}}{2} + \vartheta(h^2). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Por lo que se tienen factores de corrección para su promedio que son del mismo orden. En casos de esta forma se tiene que $\langle \delta A \rangle \neq \overline{\delta A}$.

Planteado como es que se realizaran los promedios, podemos definir las cantidades a utilizar. La primera es la definición del contraste de densidad δ , ver ecuación (3.2) cuyo equivalente numérico para una malla es

$$\delta_{i,j,k} = \frac{\rho_{i,j,k} - \langle \rho \rangle}{\langle \rho \rangle}, \quad (6.12)$$

donde la densidad de energía ρ viene siendo dada por

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2a^2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi). \quad (6.13)$$

Para el valor promedio de la densidad de energía $\langle \rho \rangle$, se utilizan las ecuaciones (5.24), (5.25) y (5.26), cuyos equivalentes en la malla son

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\dot{\phi}}{2} \right\rangle &= \frac{1}{n^3} \sum_{i,j,k} e^{\beta/2} \frac{1}{2} \dot{\phi}_{i,j,k}^2, \\ \left\langle \left(\frac{\nabla \phi}{2a} \right)^2 \right\rangle &= \frac{1}{n^3} \sum_{i,j,k} e^{\beta/2} \frac{1}{2} g_{i,j,k}^{lm} \partial_l \phi_{i,j,k} \partial_m \phi_{i,j,k}, \\ \langle V \rangle &= \frac{1}{n^3} \sum_{i,j,k} e^{\beta/2} V_{i,j,k}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Todas las cantidades son calculadas en una malla numérica tridimensional. El valor de $g_{i,j,k}^{lm}$ viene definido por las ecs. (5.15) y (5.20). Estas expresiones definen correctamente la forma de calcular los promedios espaciales para cualquier cantidad dentro del programa.

6.2. Condiciones iniciales

Al iniciar una simulación se le asignan condiciones iniciales a los campos ϕ y $\dot{\phi}$, de tal forma que los valores dominantes en cada caso para el fondo homogéneo e isotrópico, sean los valores promedio sobre la malla numérica.

Los valores promedio deben satisfacer la constricción de Friedmann,

$$H_i^2 = \frac{8\pi G}{3} \langle \rho \rangle_i, \quad (6.15)$$

donde H_i y $\langle \rho \rangle_i$ son el valor Hubble inicial y la densidad de energía inicial para la parte homogénea e isotrópica. Posterior a esto se asignan los valores para la longitud de cada lado de la caja, $L_i = \text{times} \times H_i^{-1}$, y se define el $dx \equiv L/n$, siendo L la longitud de la caja y n el número de puntos por lado. Esto da la resolución de la caja y se relaciona con un tamaño físico, $dx_{phys} = a(t)dx$, donde $a(t)$ es el factor de escala que al inicio de la simulación es asignado como $a(t_0) = 1$, por lo que al inicio de la simulación $dx_{phys} = dx$.

Los valores de L_i y H_i deben ser elegidos de forma tal, que restrinjan los límites de k , cuyos valores mínimos y máximos están relacionados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{k_{min}}{H_{ini}} &= \frac{2\pi}{ndx_{phys}H_{ini}} \\ \frac{k_{max}}{H_{ini}} &= \frac{2\pi}{ndx_{phys}H_{ini}} fft_{numk}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

se tiene que fft_{numk} varía dependiendo del número de puntos en el que se realiza la simulación y el tipo de esquema que se utilice para definir la derivada.

Después de preparar y asignar las condiciones iniciales para el fondo de universo homogéneo e isotrópico, se establecen las del campo $\delta\phi$, cuya amplitud es designada como

$$\begin{aligned} A_{\delta\phi} &= \frac{1}{2\omega_k} \\ A_{\dot{\delta\phi}} &= \frac{\omega_k}{2}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

donde $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$ y m es la masa del campo escalar. Las amplitudes son asignadas por medio de una distribución Gaussiana en el espacio de k tridimensional,

$$P(k) \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-k^2/2}. \quad (6.18)$$

Una vez que esto es realizado, se regresa al espacio real y asigna un nuevo campo ϕ el cual es una mezcla de las cantidades homogéneas y las perturbadas,

$$\begin{aligned} \phi(t, \vec{x}) &= \phi_0(t) + \delta\phi(t, \vec{x}) \\ \dot{\phi}(t, \vec{x}) &= \dot{\phi}_0(t) + \dot{\delta\phi}(t, \vec{x}). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Obteniendo al final un arreglo tridimensional del campo que se dejara evolucionar en el tiempo.

La simulación se realiza utilizando $L = 15H^{-1}$, con un número de puntos por lado, $n = 64$, con un total de puntos, $N = n^3 = 262144$, teniendo un esquema de HLattice2 y el integrador de 6° orden.

6.3. Fondo Homogéneo

El valor inicial del campo se asigna de la forma, $\phi = \phi_0 + \delta\phi$, posterior a esto el código evoluciona la cantidad ϕ sin considerar la separación de los términos que se utilizaron al momento de la asignación, por lo que deja de existir una distinción entre la parte homogénea y la perturbada. Al referirse a fondo homogéneo o cantidades homogéneas en realidad no referimos a los valores promedio de cualquier cantidad de la forma $\phi_0 \equiv \bar{\phi}$. Esto es siempre y cuando la variable en cuestión sea mucho mayor al orden de h , como en el caso del campo ϕ , el cual es suficientemente grande para aproximar $\bar{\phi} \approx \langle \phi \rangle$.

Por esta razón la distinción entre la parte homogénea y la perturbada se realiza únicamente al momento en que se desea extraer los resultados a observar ya que el código evoluciona el conjunto sin considerar diferencia alguna. Este punto es una de las razones por las cuales una simulación de este tipo nos permite corroborar el comportamiento predice en la teoría y viceversa, ya que es posible ver la evolución sin realizar aproximaciones.

Para observar que el comportamiento del programa sea correcto, es necesario probarlo con los valores promedio, comparando su comportamiento con las cantidades homogéneas deducidas en el capítulo (4.6), cuando el campo homogéneo esta oscilando alrededor del mínimo del potencial, con lo que se obtienen las propiedades de un universo dominado por una componente para el caso a tratar. Como el potencial utilizado es $V(\phi) = m^2\phi^2/2$, con lo cual la ecuación (4.39), predice que la densidad promedio debe ir como $\rho \sim a^{-3}$.

La figura 6.1 muestra la gráfica del promedio del campo, el cual está oscilando entorno al mínimo del potencial. La amplitud de la oscilación disminuye con el tiempo, ya que la densidad de energía esta relacionada con el campo ϕ por medio de la ecuación (6.13), esto causa que disminuya con el tiempo. Esto sucede de manera adecuada siempre que se esté en el límite $m \gg H$. Esto se asegura en las condiciones iniciales al imponer que se satisface la constricción de Friedmann con la propiedad de

$$H \sim \sqrt{V} \sim m\phi, \quad (6.20)$$

asegurando que la oscilación esté dentro o se acerque al limite mencionado. Para asegurar esto, los valores iniciales son asignados de tal forma que

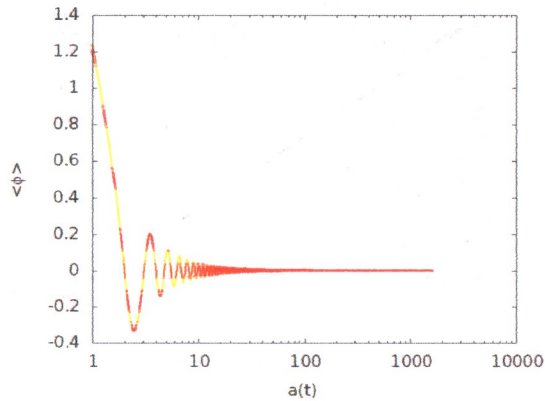


Figura 6.1: Promedio espacial del campo, el cual inicia un poco antes de cumplir la relación (6.21). Cuando llega a ese limite el campo comienza a realizar su oscilación y se puede decir que el promedio comienza a comportarse como materia oscura. Por ejemplo la evolución de su densidad de energía.

$$\frac{H}{m} \sim \phi_0 \lesssim 1. \quad (6.21)$$

Para el caso de la simulación el valor inicial es $\phi_0 = 1.24$, ya que con este valor se da un tiempo para que las perturbaciones se estabilicen antes de que el campo comience a oscilar. Para valores menores, ($\phi_0 \ll 1$), la evolución inicia muy cerca del régimen no-lineal donde la evolución es detenida por el código. Los valores superiores, ($\phi_0 \gg 1$), no cumple con la condición (6.21), por lo que el campo disminuye sin oscilar y todo el análisis del capítulo (4.6), no es válido. Cuando alcanza un valor con el cual cumpla 6.21, comienza a oscilar disminuyendo en amplitud. El valor de la densidad de energía seguirá el comportamiento de un universo dominado por materia, entonces se tiene que ver como disminuye con respecto al factor de escala. Para comprobar que esta realmente disminuye como $\langle \rho \rangle \sim a^{-3}$, se aplico un ajuste para $\log_{10} \langle \rho \rangle = m \log_{10} a + b$, ya que una recta es más sencilla de ajustar, obteniendo los valores:

- $m = -3.00137 \pm 0.0004448$
- $b = -8.00875 \pm 0.001143$

$$\blacksquare \chi_{dof}^2 = 0.0003066.$$

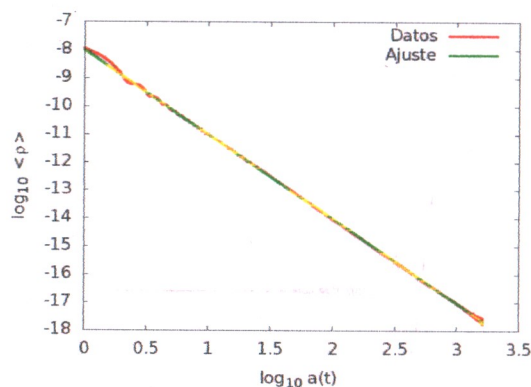


Figura 6.2: El cambio de la densidad de energía con respecto al factor de escala, al inicio cuando el campo no ha comenzado su oscilación el decremento no es totalmente el adecuado, posterior a esto inicia el decremento como un universo dominado por materia, $\rho \sim a^{-3}$. Incluyendo la curva a la cual se ajusta.

Es importante hacer notar aquí que el valor promedio de ρ , según las definiciones (6.1) y (6.2), debe ser el segundo ya que la densidad de energía inicia del mismo orden que h , por lo cual las correcciones no pueden despreciarse y se tiene $\langle \rho \rangle \neq \bar{\rho}$. También se puede ver como se comportan las diferentes componentes de la densidad (6.14) en las figuras 6.3, 6.4 y 6.5. Se puede observar como oscilan durante la evolución, como se menciona cuando se presenta (4.28) y (4.38).

Todas las cantidades promedio observadas hasta el momento, cumplen las condiciones del universo homogéneo como fue visto en capítulos anteriores, esto indica que el campo escalar se comporta como materia oscura. Durante el tratamiento que se le da a la evolución del campo escalar, no se posee distinción alguna entre parte homogénea y perturbada, esta distinción es realizada al momento de obtener las variables de interés, obteniendo los resultados predichos en la sección 4.6 donde las separaciones son realizadas.

6.4. Perturbaciones

Después de haber visto que el comportamiento del campo es el adecuado cuando se trata con las cantidades promedio, ahora hay que analizar las can-

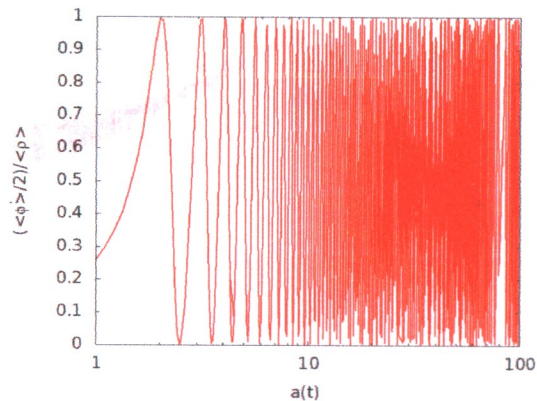


Figura 6.3: El promedio de la energía cinética normalizado con la densidad de energía total, que durante la evolución del campo se encuentra oscilando y nunca llega completamente a 1 pero en puntos es la energía dominante como debe de suceder.

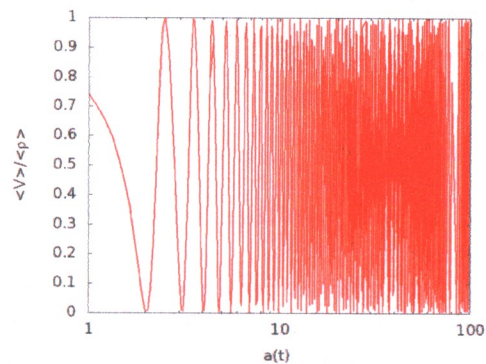


Figura 6.4: El promedio de la energía potencial normalizado con la densidad de energía total, donde al estar normalizado se puede ver por que alrededor de una oscilación esta es la energía que permite caracterizar el máximo, que en la ecuación (4.37) es un requisito para ser valida.

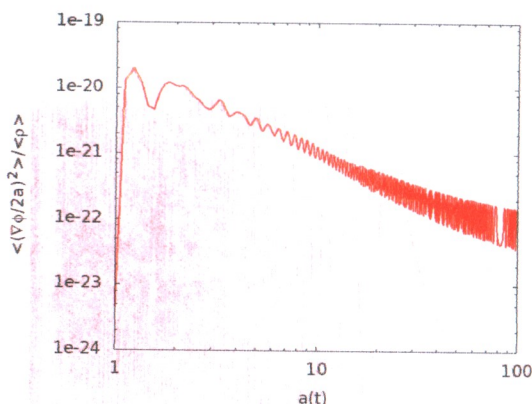


Figura 6.5: El promedio del gradiente de energía normalizado con la densidad de energía total, que en los tratamientos tradicionales es considerado cero sin embargo gracias a que este no es así permite que el campo pueda interactuar por las perturbaciones ya que si este fuera cero se recuperaría un fondo homogéneo para el campo.

tidades que dan información sobre las perturbaciones. La primera cantidad es la propia perturbación en el campo $\delta\phi$.

En la figura 6.6, se puede observar la evolución del promedio de la perturbación del campo $\langle\delta\phi\rangle$, y como esta disminuye con el paso del tiempo. Sin embargo, esta nunca puede alcanzar el cero, que es lo que se esperaría de una perturbación con media de cero. La razón por la que esta no tome ese valor se puede ver de la ecuación (6.11), ya que el promedio espacial de esta cantidad

$$\langle\delta\phi\rangle \approx \overline{\delta\phi} - \frac{\overline{\phi\dot{h}}}{2} + \frac{\overline{\dot{\phi}h}}{2} + \mathcal{O}(h^2), \quad (6.22)$$

donde se tendría que $\overline{\delta\phi} = 0$, pero como en este caso $\langle\delta\phi\rangle \neq \overline{\delta\phi}$ por lo que posee una amplitud distinta de cero.

Cuando se observa la evolución de las perturbaciones, la cantidad que es importante y que se ha estado desarrollando es el contraste de densidad δ . Gracias a que el sistema es resuelto de forma tridimensional, es posible observar el contraste de densidad de esta manera. Antes de poder verlo de forma tridimensional, hay que ver como es la evolución en el tiempo. Esta se realiza durante la etapa de perturbaciones lineales, donde se vio en el capítulo 3.3, que cuando se presentan perturbaciones que su longitud es menor a la del Hubble para ese universo, se tiene que el contraste de densidad evoluciona como $\delta \sim a(t)$.

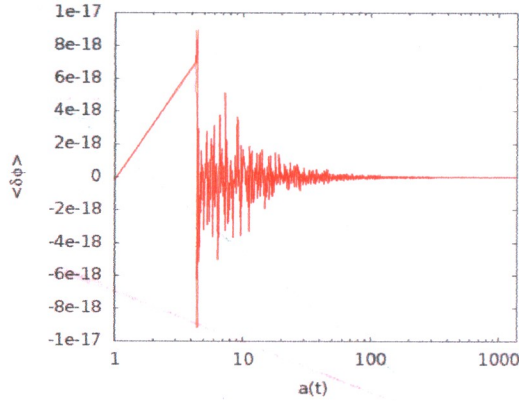


Figura 6.6: Promedio de la perturbación, $\delta\phi$, donde se observa que posee una oscilación, pero después de un tiempo su amplitud es pequeña. Sin embargo no alcanza llegar completamente a cero, como se puede ver gracias al desarrollo que lleva a la ecuación (6.22).

A través del análisis relativista se comprobó como evoluciona y además que existe una relación entre el contraste de densidad δ y la traza de la perturbación de la métrica h , por lo cual cuando se considera materia oscura

$$\delta = -\frac{h}{2} \sim a. \quad (6.23)$$

La relación es válida para cualquier modo del contraste de densidad. La primera forma de observar esto es durante la evolución, es por medio de los valores rms,

$$\begin{aligned} \delta_{rms} &= \sqrt{\langle \delta^2 \rangle}, \\ h_{rms} &= \sqrt{\langle h^2 \rangle}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

La evolución de las 2 cantidades puede observarse en la figura 6.7.

Claramente se ve como δ_{rms} va proporcional al factor de escala. Pareciera que en un principio h_{rms} no siguiera la relación predicha. Esto se puede observar al sacar la razón entre las 2 cantidades que debe mantenerse constante en la evolución, ver figura 6.8.

La razón por la cual esto no es así, puede ser apreciada si se considera el valor del contraste de densidad para distintos modos, δ_k .

Como se vio en el capítulo 4.6, se tiene que los valores en los cuales el campo escalar se comporta correctamente como materia oscura es para los

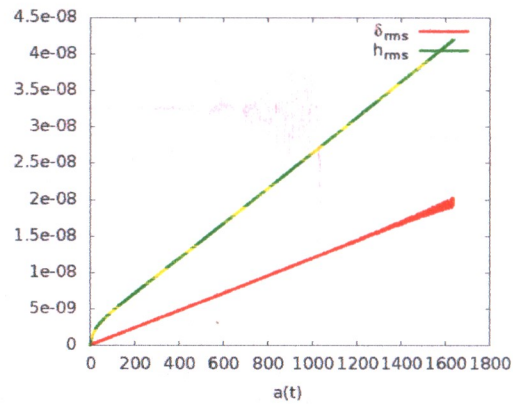


Figura 6.7: Evolución en el tiempo de δ_{rms} y de h_{rms} , donde se tiene que $\delta \sim a(t)$. El comportamiento puede descomponerse en distintos modos en el espacio de Fourier, donde en un principio no todos cumplen con la relación (6.23), afectando durante el principio de la evolución.

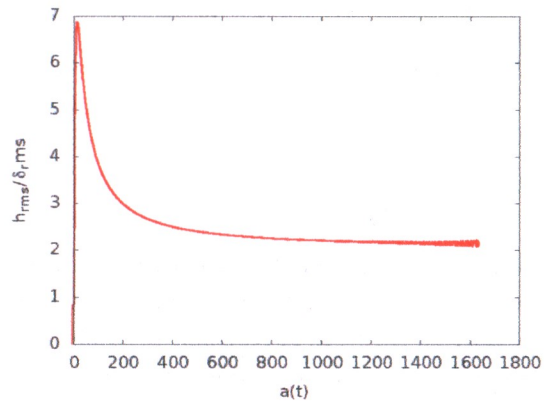


Figura 6.8: La razón entre δ y h dice que debería seguir una relación de 2, sin embargo esto no es así, aunque conforme avanza la evolución se ve la tendencia hacia ese valor.

modos $k/a < m$. Al principio no se tienen muchos modos que cumplan esta relación, lo cual se puede deducir a través de la ec. (6.16), obteniendo una relación entre k y m utilizando las relaciones,

$$\begin{aligned} \frac{k}{H} &= C \\ \frac{H}{m} &\approx \phi \\ \frac{k}{m} &\approx C\phi, \end{aligned} \quad (6.25)$$

C , es el valor de la relación de cualquiera de los modos entre k y H . Para obtener el comportamiento correcto, se debe tener que ϕ y C sean menores a 1. Cuando se consideran el valor de ϕ_0 entonces

$$\frac{k}{m} \approx C\phi_0 = C(1.24). \quad (6.26)$$

Por lo que al inicio, solo un número determinado de modos cumplen la relación y por lo tanto los valores rms, no se comportan correctamente.

Conforme el campo evoluciona, la relación k/a se hace más pequeña, mientras que m , se mantiene constante, con lo cual una mayor cantidad de modos entran dentro del límite y comienzan a comportarse como es debido propiciando al crecimiento de la perturbación, pero que ahora cumple la relación adecuada entre δ y h , que como se vio en los capítulos anteriores, es particular para el caso de la materia oscura. Este comportamiento se puede ver en las figuras 6.9, 6.10 y 6.11, que representan el modo más infrarrojo ($k/H = 0.4178879$), uno intermedio ($k/H = 5.445427$) y el más ultravioleta ($k/H = 10.0530965$).

El código sufre de un corte al infrarrojo y por la forma en que se asignan las condiciones iniciales, el campo y las perturbaciones inician independientes, por lo cual toma un tiempo en que la interacción entre estas comiencen a evolucionar de forma que cumplan la relación adecuada para materia oscura, sin necesidad de fijar valor alguno en los componentes de presión o densidad del campo. Por lo que no se pueden obtener valores adecuados en una evolución demasiado corta, ya que durante un periodo de tiempo pequeño no se logra alcanzar los valores adecuados.

En las figuras 6.10 y 6.11, se ve que la evolución es más tardía ya que estos en un principio no cumplen las relaciones expuestas, pero conforme el paso del tiempo estos caen dentro del rango y se comportan adecuadamente.

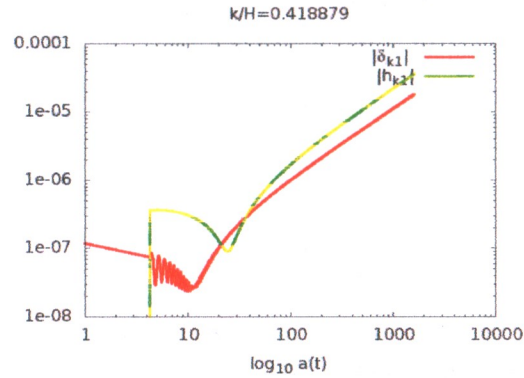


Figura 6.9: Evolución de los modos $k/H = 0.418879$, que corresponde al más infrarojos de δ_k y h_k , se puede observar como estos evolucionan con una relación constante después de que ambos se han estabilizado, ya que el programa tiene un corte dependiendo el tamaño de la caja, si es demasiado grande arruina los modos infrarojos, generando los picos en la evolución que no están presentes en los modos superiores.

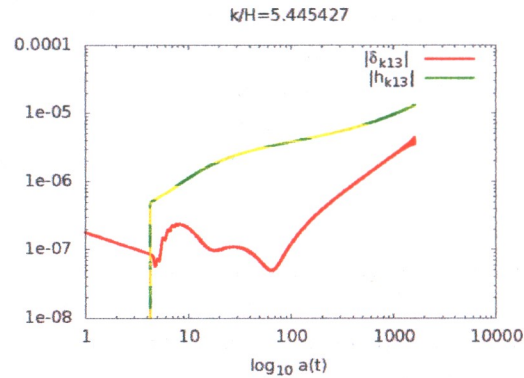


Figura 6.10: La evolución de un modo $k/H = 5.445427$ que en un principio no cumplía la relación establecida para comportarse como materia oscura, conforme va evolucionando entra al régimen $k/a \ll m$, las perturbaciones comienzan a crecer y en un tiempo posterior de evolución al presentado crecerán con una relación $|\delta| = |h|/2$. Aquí se puede ver que a diferencia del modo más infrarojo no posee el corte y no se aprecia el pico que es prominente en h_k .

Fuera de $k/a \ll m$, tienden a comportarse como ondas oscilantes, similar al análisis Newtoniano cuando no hay expansión presente visto en el capítulo 3.

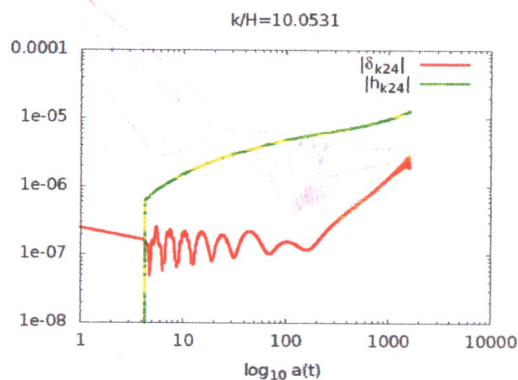


Figura 6.11: El modo más al ultravioleta ($k/H = 10.0530965$), que es el que más tarda en comenzar a crecer, aquí se aprecia cómo es que las perturbaciones demasiado pequeñas no crecen, hasta que su longitud de onda $\lambda_{phys} = 2\pi a/k$ es suficientemente grande, lo que permite la evolución del contraste de densidad.

Si se hace una gráfica, comparando los modos juntos se puede ver como es que los modos superiores crecen de forma más tardía.

La comparación entre estos modos se puede ver en la figura 6.12. Se observa como los distintos modos conforme evoluciona el campo, Obtienen el comportamiento de materia oscura. También se puede observar esto para h , en la figura 6.13. Por último se puede observar, como es el espectro, observando todas las frecuencias para diferentes tiempos, en la figura 6.14 para δ_k y figura 6.15 para h_k , todos en unidades de k_u donde su relación con $k/H = 2\pi K_u/n$, donde n es el número de puntos por lado, para este caso 64. En el espectro se puede observar como en un inicio se tenía que las sobredensidades estaban distribuidas en todos los modos y eran despreciables, indicando un universo homogéneo pero, conforme evoluciona los modos inferiores, representando longitudes de onda grandes, un indicio del orden de formación de estructura, yendo de abajo hacia arriba, por lo que conforme crecen las perturbaciones de gran tamaño, disminuyen las pequeñas.

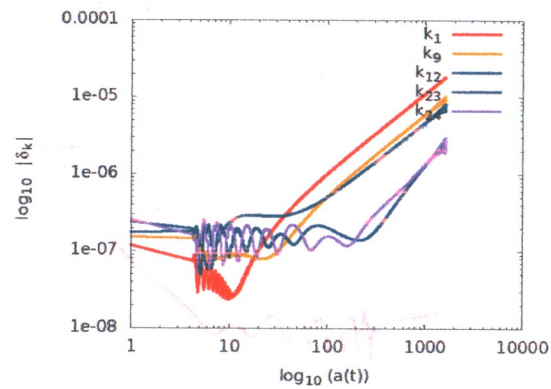


Figura 6.12: Comparación entre la evolución de distintos modos de δ_k , donde se ve mas claro como es que los modos superiores oscilan en una época temprana y posteriormente crecen.

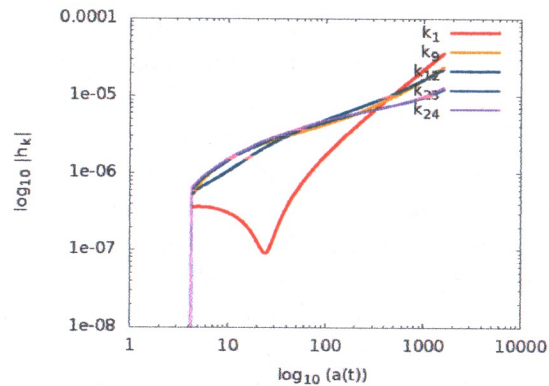


Figura 6.13: Comparación entre la evolución de distintos modos de h_k , donde el comportamiento de los modos superiores no son propiamente los de a , en tiempos tempranos ya que antes de esto el comportamiento como materia oscura no esta garantizado, sin embargo estos crecen y debido a los modos ultravioletas es que los valores rms, no es al principio de la evolución como se espera.

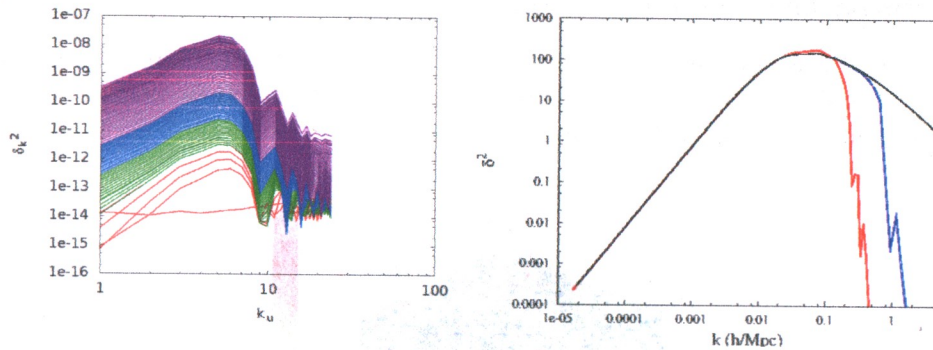


Figura 6.14: Izquierda.-Se presenta la evolución temporal de todos los modos en un rango entre $(k/H = 0.4178879)$ y $(k/H = 10.0530965)$. En color rojo se tienen distintos tiempos entre $a(t) = 1$ y $a(t) = 14$, la primera línea de abajo hacia arriba es $a(t) = 1$, en la que se observa que todos los modos poseen un valor similar. Conforme prosigue la evolución esto cambia y se tiene una preferencia de crecer en los valores medios y bajos de k . EL color verde es para distintos tiempos entre $a(t) = 15$ y $a(t) = 50$ y el azul para los que se encuentran entre $a(t) = 51$ y $a(t) = 152$. El color violeta es para todo tiempo de evolución superior a $a(t) = 152$. Derecha.- La gráfica para el mismo caso de un campo escalar representando materia oscura, utilizando los resultados semi-analíticos [16]. Las líneas corresponden a un valor de $a(t) \approx 200$, para λ CDM (línea negra) y para ϕ CDM con masas de $\lambda = 5$ (línea roja) y $\lambda = 10$ (línea azul) siendo de $m_{\phi}^2 = \lambda^2 8\pi G V_0$ y $V_0 \approx (36.5 eV)^4$. Se presenta con el propósito de hacer una comparación cualitativa de la forma que posee el espectro a distintos modos, viendo que tiene a crecer para formar un pico en valores medios de k .

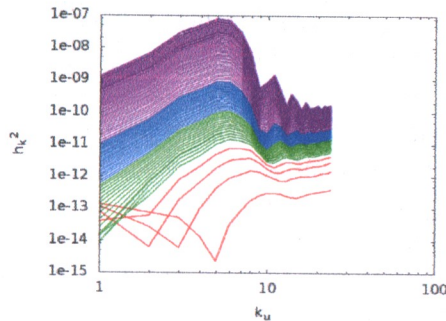


Figura 6.15: El espectro para distintos tiempos de h_k , que poseen una forma similar a la de δ_k , en la evolución temporal, donde se pueden observar que para valores de k pequeña se tiene un corte indicado por el pico de abajo hacia arriba. Cuando avanza al evolución obtiene la misma forma que δ_k .

Perturbaciones en 3 dimensiones

Por último, después de observar que el comportamiento para el campo, con lo cual es posible caracterizar su evolución, también es posible ver el campo en el espacio tridimensional.

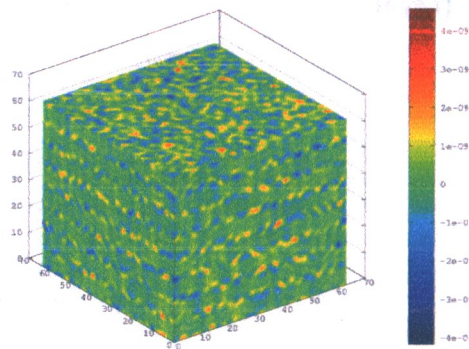


Figura 6.16: Condición inicial de la perturbación $\delta\phi$, en este caso se tienen omitido el valor medio ya que es mucho mayor que las perturbaciones, pero se puede ver que la densidad alrededor del campo es muy tenue.

Se puede observar las perturbaciones en las figuras 6.16 y 6.17. Estas después de ser iniciadas evolucionan de tal forma que aunque disminuyen en amplitud se mantienen conglomeradas.

Se puede apreciar como se conserva la isotropía cuando se observa que no existe diferencia en distintos ángulos, teniendo así la presencia del Principio Cosmológico, al considerar amplias zonas. Cuando se aprecias áreas menores este desaparece al igual que en el universo actual. De igual forma se puede observar como evoluciona el contraste de densidad.

En la imagen 6.18, se observa el contraste de densidad cuando el factor de escala $a(t) = 1$, se puede observar como hay homogeneidad por la falta de cambios de densidad por lo que se hace presente el el Principio Cosmológico, ya que no importa para que lado se observa, no hay una dirección de preferencia.

Se observa la evolución más adelante en el tiempo en la figura 6.19, el contraste de densidad erece como se ve en la figura 6.20.

El campo sigue evolucionando y las sobredensidades sigue creciendo y se concentra en regiones fijas lo que es correcto para objetos que se encuentran

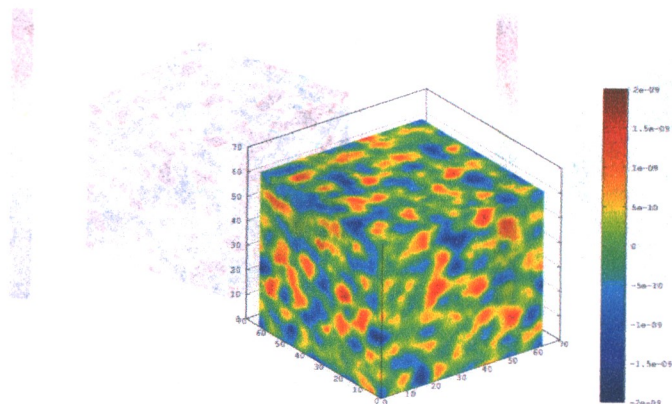


Figura 6.17: La perturbación $\delta\phi$ cuando la evolución se encuentra al factor de escala $a(t) = 285.2$, estas se pueden observar como incrementos alrededor de la malla por lo que ahí se puede observar incremento de densidad del campo.

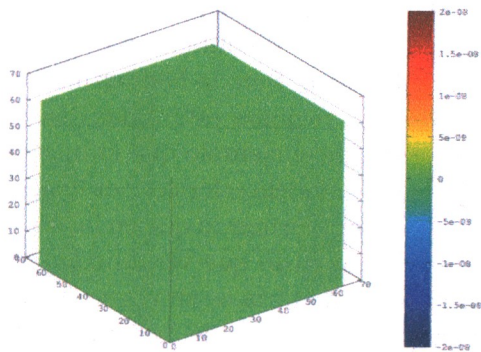


Figura 6.18: El contraste de densidad tridimensional cuando el factor de escala es $a(t) = 1$, donde se observa que es homogéneo, al inicio entonces en un tiempo temprano del campo, que en este caso representa las condiciones que se desean al inicio, como se presentan para el universo en el principio cosmológico.

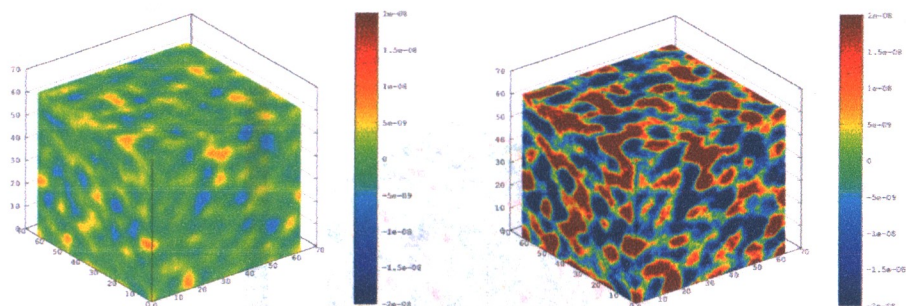


Figura 6.19: Izquierda.- Evolución del $\delta(\vec{x})$ cuando se encuentra a $a(t) = 203.77$, se observa como hay un incremento en las sobredensidades alrededor de la red, y una concentración lo que en estas regiones indica un incremento de la forma como el modelo esférico. Derecha.- El contraste de densidad cuando su evolución se encuentra en $a(t) = 1514$, observando regiones sobre densas muy localizadas, que si se hace una analogía al modelo de colapso esférico estas regiones, que ya son sobredensas que alcanzan a ligarse gravitacionalmente lo que en el futuro formara las galaxias.

ligados gravitacionalmente, en estas regiones simplemente se intensifica la concentración del campo, por lo que indica que la formación de estructura se esta llevando a cabo. Cuando se considera incluso a tiempos mas tardíos en la red (ver figura 6.21), al observarla como un todo se puede tener presente aun la isotropia, ya que entre las distintas caras no se puede diferenciar cual tenga una preferencia sobre otra. Pero la homogeneidad ya no es tan obvia en este caso debido a que ya las regiones están mas densas de igual forma como sucede en el universo real, que el ejemplo que es más obvio se describió en la sección 3.3.2 para el caso del modelo esférico, por lo que esas sobredensidades, son aquellas que colapsan para formar lo que en la actualidad son los cúmulos galácticos y galaxias pero no en lo que vemos con los ojos sino las regiones como los halos galácticos de materia oscura, que engloban nuestras galaxias. Esto puede observarse a la derecha de la figura 6.19, donde las regiones ligeramente sobredensas ahora se encuentran fuertemente marcadas, dando inicio de la formación de estructura.

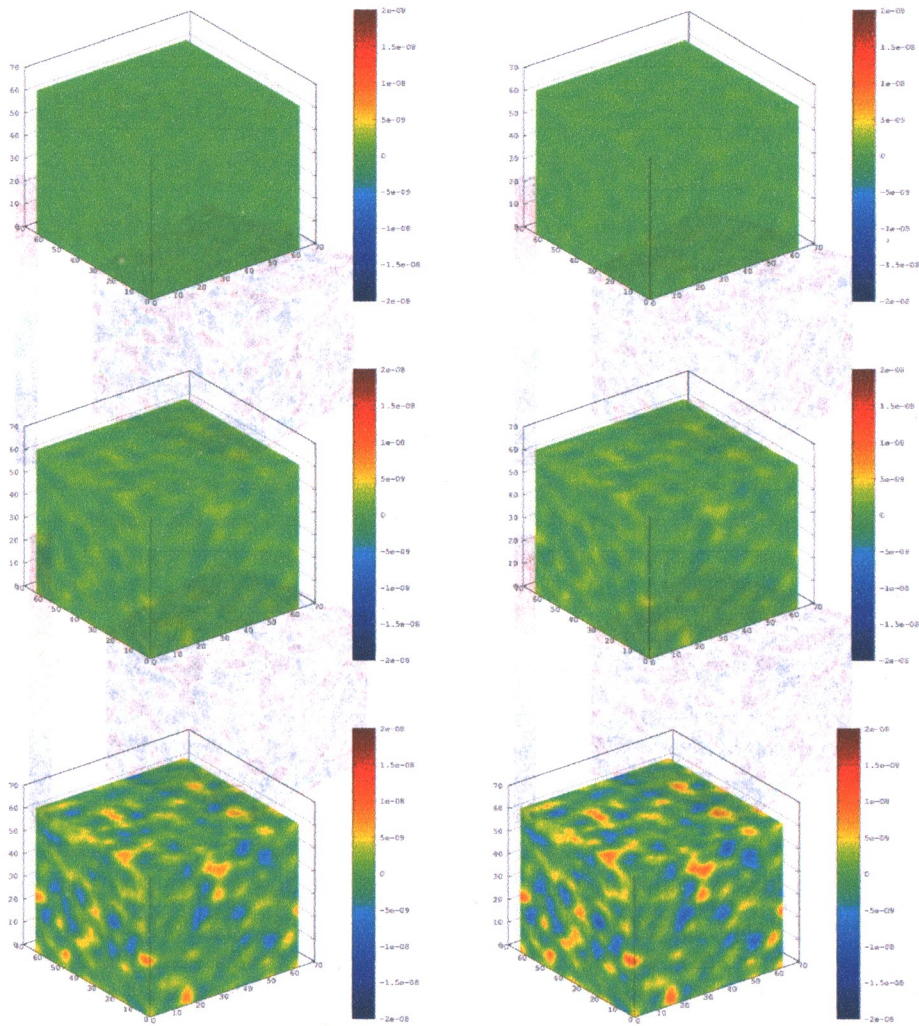


Figura 6.20: Evolución de izquierda a derecha $a(t) = 11.892$, $a(t) = 16.386$, $a(t) = 27.033$, $a(t) = 54.685$, $a(t) = 90.935$, $a(t) = 203$ se puede ver como el incremento de regiones de una mayor concentración de la densidad.

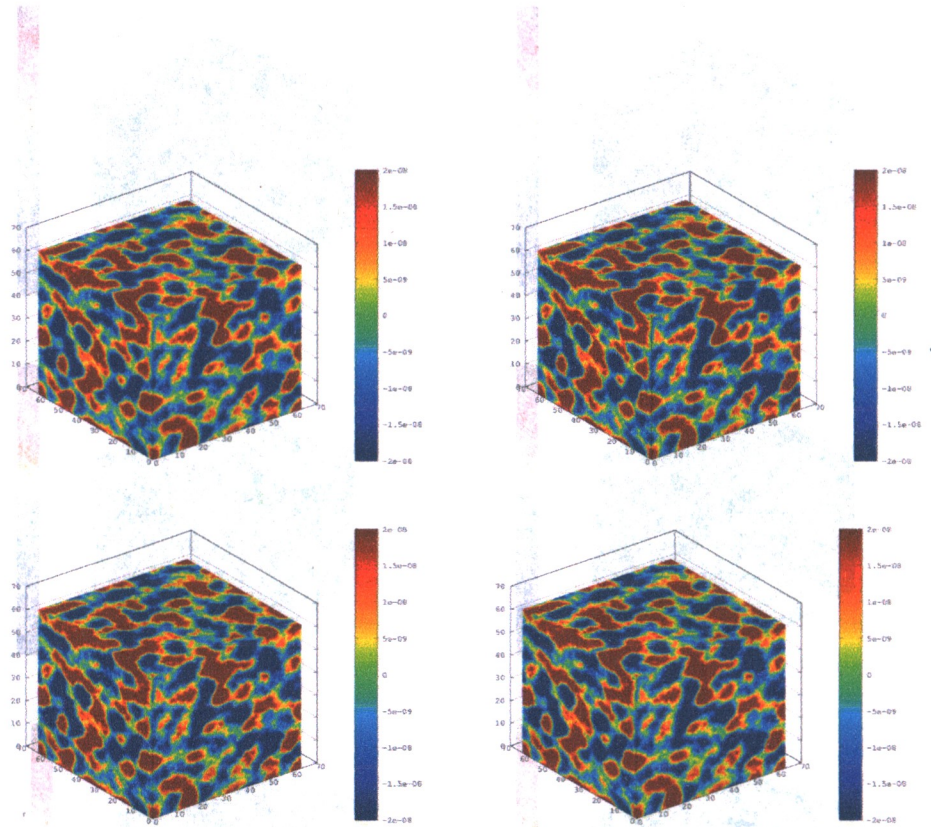


Figura 6.21: Evolución de izquierda a derecha $a(t) = 988.7$, $a(t) = 1514$, $a(t) = 1562.8$, $a(t) = 1595.8$, $a(t) = 1612.4$, $a(t) = 1629.1$. Lo que antes podía verse como pequeñas regiones ahora se puede observar regiones conectadas que se intensifican y muy bien identificadas que van representando lugares de formación de estructura..

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo, además de incluir una revisión rápida a los conceptos de la cosmología necesarios para su desarrollo, en donde se centra en la importancia que del Principio Cosmológico, puesto que se parte de él y debe cumplirse siempre que se desarrolle dentro de una métrica FRW en la cual viene implícito. La importancia proviene del hecho de que si fuera válido a todas las escalas, el universo se vería muy diferente a como es hoy, ya que no permite la formación de los objetos que vemos día a día.

Este trabajo muestra que considerando perturbaciones en el universo temprano es posible explicar que existe una semilla para la formación de galaxias, cúmulos, planetas, etc. Todo lo que se observa a pequeña escala es consecuencia de estas perturbaciones iniciales, considerando el modelo λ CDM, que es el que más se apega a las observaciones.

Tradicionalmente se trata a la materia oscura como un fluido perfecto sin embargo en este trabajo, esto no es así, se diferencia en que la materia oscura está compuesta por un campo escalar, que en principio no es un fluido, ya que las componentes de su tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$, son distintas a este excepto cuando se considera un campo homogéneo en el espacio, lo que permite realizar una analogía a las componentes del fluido perfecto. Sin embargo como se remarco en el caso de un campo escalar, a diferencia de un fluido con una función de estado $P = \omega\rho$, no siempre existe una relación entre la “presión” y “densidad” del campo. Una vez que se establece esto entonces se tiene una forma de caracterizar al campo escalar como el componente de materia, esto es posible como ya se vio y es algo ya estándar por lo que el campo ya una vez determinado como un materia, adquiere una relación con la presión lo que implica $P = 0$, y se tiene de igual forma una densidad de

energía. La parte más importante del trabajo es que utilizando un campo escalar, sin asumir aproximaciones de densidad presión o en la métrica, es posible representar materia oscura fría y que esta cumple con permitir la formación de estructura.

El potencial más sencillo para el campo escalar que cumple la condición de materia es $v = \frac{m^2\phi^2}{2}$, siendo m^2 , la masa del campo. Una vez que se aseguró que el campo oscile entonces se resuelve su ecuación de movimiento de forma numérica, se debe de resaltar dos factores importantes en la resolución numérica:

1. Existen diversos códigos que permiten la evolución de un campo escalar, por lo que su solución en 3 dimensiones es posible además que pueden evolucionar sin asumir aproximaciones. Esto es lo que lo diferencia con las soluciones semi-analíticas que se han encuentran en la teoría.
2. Hasta el momento HLattice es el único código que considera las perturbaciones realizadas en la métrica, la cual complementa al campo y se obtiene una solución más completa.

Esto entonces permite una solución más completa sin tener que realizar las aproximaciones que normalmente se realizan, con lo que es posible entonces representar la formación de estructura en el universo temprano de forma más adecuada. Al comportarse de esta forma y realizar las simulaciones tridimensionales, se encuentra que es cualitativamente el mismo que cuando se consideran las aproximaciones. Este comportamiento en primera considera que el campo escalar se comportara como materia cuando se tiene el límite de $m \gg H$. Por lo que la masa del campo es una limitante. Además el campo posee distintos modos k , solo los modos que alcanzan el límite $k \ll am$ durante la evolución, recuperan la relación que se espera para la materia oscura con las perturbaciones de la métrica h .

El campo escalar igual reacciona para obtener el comportamiento con el cual debe de evolucionar en el tiempo, ya que antes de esto, simplemente se tiene que la cantidad que indica sobredensidad que es lo esperado para formar estructura δ , se comporta como una onda que oscila. Entonces el contraste de densidad, δ , es el esperado para materia oscura creciendo como $\delta \propto a$, lo que indica que las sobredensidades crecen y que se esta teniendo formación de áreas con mayor densidad que la promedio, esto siempre y cuando los modos correspondientes sean menores que la masa, antes de eso, simplemente oscilan, hasta que la razón k/a es mucho menor que la masa y

entran al régimen de crecimiento de inhomogeneidades, existiendo puntos en que todos los modos se comportaran similarmente, permitiendo el crecimiento y formación de la estructura. Todo esto, considerando hasta ahora el régimen de perturbaciones lineales en la métrica, todo realizado en 3 dimensiones en el espacio por lo que es una reafirmación mas completa.

7.1. Perspectivas

Hasta ahora el comportamiento de todo es realizado perturbaciones lineales, debido a las limitaciones que da el programa con respecto al hardware disponible. La falta de paralelización en memoria compartida impide que se puede evolucionar de forma mas eficiente y solo puede hacerse con memoria física, se tiene que el tiempo promedio para una evolución por cada 100 factores de escala es de $5 \left(\frac{n}{64}\right)^3 \left(\frac{8}{\#nucleos}\right)$ horas.

Se tiene una limitación debido a las aproximaciones numéricas utilizadas para la eficiencia del programa. Estas aproximaciones numéricas no permiten que el régimen lineal sea superado. Las aproximaciones numéricas se realizan para mejorar la eficiencia del código y para mantener ($h < 1$), si se elimina esta condición y se mejora el hardware, las aproximaciones pueden ser omitidas.. Entonces la perspectiva es eliminar estas limitantes y observar la evolución fuera del régimen lineal en las perturbaciones en la métrica, lo que permitiría entonces estudiar una etapa más reciente del universo, y de igual forma hacerlo mas completo incluyendo no solo la dominación de materia sino de igual forma la de otros componentes del universo para poder apreciar como es la transición para la dominación de una constante cosmológica al día de hoy, como lo predice el modelo estándar de cosmología, y gracias al desarrollo en 3 dimensiones observar la formación de las estructuras en el espacio real como se podrían observar en el universo real.

Bibliografía

- [1] Las Bergstrom. Saas-Fee Lecture Notes: Multi-messenger Astronomy and Dark Matter. 2012.
- [2] A. de la Macorra and G. Piccinelli. General scalar fields as quintessence. *Phys.Rev.*, D61:123503, 2000.
- [3] M.A. Rodríguez-Meza et al. (Editores). *Métodos Numéricos en Astrofísica*. Innovación Editorial Lagares de México, 2011.
- [4] Pedro G. Ferreira and Michael Joyce. Cosmology with a primordial scaling field. *Phys.Rev.*, D58:023503, 1998.
- [5] Ernst Hairer. Lecture 1: Hamiltonian systems. http://www.unige.ch/~hairer/poly_geoint/week1.pdf.
- [6] Ernst Hairer. Lecture 2: symplectic integrators. http://www.unige.ch/~hairer/poly_geoint/week2.pdf.
- [7] Z. Huang. arxiv:1102.0227 [astro-ph.co].
- [8] Edward W. Kolb and Michale S. Turner. *The Early Universe*. Westview Press, 1994.
- [9] Andrew Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*. WILEY, 2003.
- [10] Andrew R. Liddle and David H. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [11] David H. Lyth and Andrew R. Liddle. The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure. 2009.
- [12] C.P. Ma and E. Berthshinger. *Astrophys. J.*, 455(7), 1995.

- [13] Tonatiuh Matos, Francisco Siddhartha Guzman, and L. Arturo Urena-Lopez. Scalar field as dark matter in the universe. *Class.Quant.Grav.*, 17:1707–1712, 2000.
- [14] Tonatiuh Matos, Jose-Ruben Luevano, Israel Quiros, L. Arturo Urena-Lopez, and Jose Alberto Vazquez. Dynamics of Scalar Field Dark Matter With a Cosh-like Potential. *Phys.Rev.*, D80:123521, 2009.
- [15] Tonatiuh Matos and L. Arturo Urena-Lopez. Quintessence and scalar dark matter in the universe. *Class.Quant.Grav.*, 17:L75–L81, 2000.
- [16] Tonatiuh Matos and L. Arturo Urena-Lopez. A Further analysis of a cosmological model of quintessence and scalar dark matter. *Phys.Rev.*, D63:063506, 2001.
- [17] Tonatiuh Matos and L. Arturo Urena-Lopez. Scalar field dark matter, cross-section and Planck scale physics. *Phys.Lett.*, B538:246–250, 2002.
- [18] V. Mukhanov. Physical foundations of cosmology. Cambridge, UK: Univ. Pr. (2005) 421 p.
- [19] T. Padmanabhan. *Structure formation in the universe*. Cambridge University Press, 1993.
- [20] P.J.E. Peebles. Fluid dark matter. 2000.
- [21] Annika H.G. Peter. Dark Matter: A Brief Review. 2012.
- [22] William. H. Press, Saul. A. Teukolsky, William.T. Vetterling, et al. *Numerical Recipes in FORTRAN 77, The art of scientific computing*. Cambridge University Press, 1986,1992.
- [23] Ronald D. Ruth. A Canonical Integration Technique. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 30(4):2669–2671, August 1983.
- [24] Barbara Ryden. *Introduction to Cosmology*. Addison Wesley, 2003.
- [25] B.F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Series in physics. Cambridge University Press, 1985.
- [26] Robert M. Wald. *Espacio, Tiempo y Gravitación*. Fondo de Cultura Económica, 1998.

-
- [27] Benjamin D. Wandelt, Romeel Dave, Glennys R. Farrar, Patrick C. McGuire, David N. Spergel, et al. Selfinteracting dark matter. pages 263–274, 2000.
- [28] Martin White. Hot dark matter. <http://astro.berkeley.edu/~mwhite/darkmatter/hdm.html>, Marzo 2012.



Universidad
de Guanajuato

"2010. Año del Bicentenario de la Independencia Nacional
y del Centenario de la Revolución Mexicana"

Asunto: Tesis de maestría

León, Gto., a 8 de octubre de 2012

DR. OSCAR MIGUEL SABIDO MORENO
COORDINADOR DE POSGRADO DE LA DCI
PRESENTE


Estimado Dr. Sabido:

Por este medio me permito hacerle saber que he leído y revisado el trabajo de tesis titulado: *Formación de estructura del universo temprano a través de un modelo de materia oscura escalar*, del **Ing. Antonio Herrera Martín**.

En mi opinión, el trabajo cumple con los requisitos suficientes para presentarse y defenderse ante el comité sinodal, por lo que recomiendo que se proceda con los trámites respectivos para la graduación del Ing. Herrera.

Agradezco su atención y aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"


DR. LUIS ARTURO UREÑA LÓPEZ
Departamento de Física
DCI, Campus León

C.c.p. Archivo

DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS, CAMPUS LEÓN

Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre C.P. 37150 León, Gto., Ap. Postal E-143 C.P. 37000 Tel. +52 (477) 788-5100 Fax:+52 (477) 788-5100 ext. 8410, <http://www.ifug.ugto.mx>



Universidad
de Guanajuato

León, Guanajuato, a 2 de octubre de 2012

Dr. Miguel Sabido,
Departamento de Física, División de Ciencias e Ingenierías
Campus León, Universidad de Guanajuato
PRESENTE

Estimado Dr. Sabido:

Por este medio, me permito informarle que he leído y revisado la tesis titulada **“Formación de estructura del universo temprano a través de un modelo de materia oscura de campo escalar”**, que realizó el Ing. **Antonio Herrera Martín** como requisito para obtener el grado de Maestro en Física.

Considero que el trabajo de tesis realizado por Antonio reúne los requisitos necesarios de calidad e interés académico para que sea defendido en un examen de maestría, razón por la cual extiendo mi aval para que así se proceda.

Sin más que agregar, agradezco su atención y aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
“LA VERDAD OS HARÁ LIBRES”

DR. Alberto Díez Tejedor
Departamento de Física
DCI, Campus León

DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS, CAMPUS LEÓN

Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre C.P. 37150 León, Gto., Ap. Postal E-143 C.P. 37000 Tel. +52 (477) 788-5100 Fax:+52 (477) 788-5100 ext. 8410.
<http://www.ifug.uqto.mx>



Universidad
de Guanajuato

León, Gto., a 3 octubre de 2012

Dr Alejandro Gil-Villegas
Director
División de Ciencias e Ingenierías

Por medio de la presente deseo informar que he revisado completamente el trabajo de tesis del estudiante,

Antonio Herrera Martín, titulado

Formación de estructura del universo temprano a través de un modelo de materia oscura de campo escalar,

correspondiente al programa de la Maestría en Física de nuestra División.

El Sr. Herrera ha revisado y corregido su escrito de tesis a satisfacción, por lo que lo considero adecuado para ser presentado como opción al grado correspondiente en la defensa pública de tesis.

Sin más por el momento, quedo a sus órdenes.

Atentamente, los asesores:

DR. JOSE DE JESUS BERNAL ALVARADO

Departamento de Ingeniería Física

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA FÍSICA, CAMPUS LEÓN

Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre C.P. 37150 León, Gto., Ap. Postal E-143 C.P. 37000 Tel. (477) 788-5100
Fax: (477) 788-5100 ext. 8410, <http://www.fisica.ugto.mx>



Universidad
de Guanajuato

10 de octubre de 2012

DR. OSCAR MIGUEL SABIDO MORENO

Coordinador de Posgrado
División de Ciencias e Ingenierías, Campus León
Universidad de Guanajuato

PRESENTE

Por este conducto me permito comunicarle que en mi calidad de jurado para examen de grado del estudiante de **Maestría en Ciencias Antonio Herrera MArtín**, he leído y revisado la tesis titulada "**Formación de estructura del universo temprano a través de un modelo de materia oscura de campo escalar**", y considero que ésta cubre los requisitos señalados para titularse del programa de Maestría en Física. Por lo tanto, el estudiante puede continuar con los trámites correspondientes para solicitar fecha de examen de grado.

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Dr. Francisco Sastre Carmona
Profesor Asociado C
Departamento de Ingeniería Física

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA FÍSICA, CAMPUS LEÓN

Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre C.P. 37150 León, Gto., Ap. Postal E-143 C.P. 37000 Tel. (477) 788-5100
Fax: (477) 788-5100 ext. 8410, <http://www.fisica.ugto.mx>