

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

TESIS DE LICENCIATURA

Correcciones de gravedad entrópica a las órbitas planetarias

Autora:

Gemma Elizabeth Pérez
Cuéllar

Supervisor:

Dr. Oscar Miguel Sabido
Moreno



*Tesis presentada para obtener el título de
Ingeniera Física*

en la

División de Ciencias e Ingenierías
Campus León

29 de octubre de 2019

Agradecimientos

- Principalmente agradezco a mis padres por haber sido mi apoyo más grande en todos los sentidos. Cada uno, a su manera, me enseñó a trabajar por mis sueños, considerando y apoyando siempre a las personas a mi alrededor, que también trabajan por los suyos. La dedicación y el cariño con el que desarrollo este proyecto, y todos los de mi vida, es por ustedes.
- También agradezco a mis hermanos Diana, Paco y Oscar, por inspirarme, acompañarme y apoyarme a lo largo de mi vida y de mi formación profesional.
- A mi familia en general, por enseñarme la importancia de pertenecer a una comunidad unida en donde los valores y las aspiraciones de cada persona importan. Por enseñarme a aprender de la adversidad y a ser una persona honesta conmigo y con los demás.
- A mis amigos cercanos que se han convertido en familia, quienes me han apoyado sin importar nada y han estado conmigo para aprender juntos y crecer.
- A mi asesor, el Dr. Miguel Sabido, por mostrarme que un ambiente de trabajo cómodo, basado en la confianza y el respeto, es la mejor motivación para el esfuerzo de hacer un excelente trabajo.
- A mis compañeros, profesores y amigos de la Universidad de Guanajuato, con quienes tuve la oportunidad de aprender y de desarrollar proyectos personales y colectivos.

Índice general

Agradecimientos	I
1. Introducción	1
2. Gravedad Clásica	3
2.1. Fuerza central	4
2.2. El problema de dos cuerpos	5
2.2.1. Energía del sistema	7
2.2.2. Ecuación de movimiento	8
2.2.3. Análisis	10
3. Relatividad General	13
3.1. La métrica	14
3.2. Densidades tensoriales	15
3.3. Isometrías	17
3.4. Ecuación de Palatini	18
3.5. Restricciones diferenciales a las ecuaciones de campo	19
3.6. Ecuaciones de campo	21
3.7. Límite Newtoniano	23
3.8. Constante de acoplamiento	26
3.9. Solución de Schwarzschild	29
3.9.1. Soluciones estáticas	32
3.9.2. Soluciones con simetría esférica	34
4. Órbitas planetarias en Relatividad General	38
4.1. La ecuación de movimiento	40
4.2. Corrección al período orbital	42
4.3. Precesión de la órbita de Mercurio	43
5. Gravedad Entrópica	44
5.1. Fuerza Newtoniana corregida	44
5.2. Obtención de la ecuación diferencial	47
5.3. La ecuación de movimiento	50
5.4. Precesión	54
5.4.1. Precesión de la órbita de Mercurio	55
6. Discusión y conclusiones	57
A. Curvatura de la luz	59
A.0.1. Límite de Relatividad Especial	59
A.0.2. Método perturbativo	60
Bibliografía	63

En memoria de mi querido Lalo Anguiano Cuéllar...

Capítulo 1

Introducción

Este es un trabajo de investigación sobre la gravedad. En la vida cotidiana se perciben diversos fenómenos sistemáticos, inherentes a nuestro entorno y a la naturaleza en general. Ejemplos de estos fenómenos son los ciclos del día y la noche, las estaciones del año y la famosa intuición de que (en las inmediaciones de la tierra) "todo lo que sube tiene que bajar". Los tres anteriores son fenómenos producidos por la gravedad. Al ser estos efectos los predominantes a escalas humanas, junto con los fenómenos electromagnéticos, han sido desde siempre motivo de curiosidad para la humanidad.

A lo largo de la historia, se han postulado posibles respuestas a nuestras inquietudes fundamentales, en particular a las causas de los fenómenos gravitatorios que se observan en la naturaleza. Durante el siglo XVI, **Nicolás Copérnico** postuló un modelo heliocéntrico del universo, el cual, como su nombre lo sugiere, considera a la tierra, demás planetas y estrellas girando alrededor del sol. A principios del siguiente siglo, **Galileo Galilei** realizó diversos experimentos relacionados a la caída libre de los cuerpos, así como distintas observaciones astronómicas, que le permitieron confirmar el modelo heliocéntrico. Koyré, 1979.

Apoyado en los modelos anteriores, **Johannes Kepler** estudió (también a principios del siglo XVII) las trayectorias de los planetas en el sistema solar, estableciendo sus tres leyes de movimiento planetario. Con una visión mucho más general, **Isaac Newton** formuló sus leyes de movimiento, publicadas en 1687. Dichas leyes describen el movimiento de las estrellas, planetas y satélites, pero también describen el movimiento de los cuerpos en la tierra. Con base en la mecánica de sus tres leyes, Newton postuló su teoría de la gravedad, denominada Teoría de la Gravitación Universal. Rooney, 2013. La primera parte de este trabajo consiste en una revisión detallada de la gravedad Newtoniana aplicada al problema Kepleriano de órbitas planetarias. De lo anterior, naturalmente, se obtendrán las leyes de Kepler.

A pesar de los éxitos de la teoría de gravedad formulada por Newton y de la revolución en la concepción humana del universo que dicha teoría supuso, existen observables que no tienen descripción dentro de ella. Uno de estos fenómenos consiste en la precesión de las órbitas, como la observada para la órbita de Mercurio. Más de 200 años después de la publicación de la teoría de gravedad Newtoniana, **Albert Einstein** publicó su teoría de la gravedad en 1915. La llamada Teoría de la Relatividad General está basada en una mecánica relativista, desarrollada también por Einstein en 1905.

La relatividad de Einstein supuso otra revolución en la concepción humana del universo. A pesar de sus resultados poco intuitivos, esta teoría tuvo sus primeros

éxitos al poco tiempo de ser publicada. Entre las pruebas clásicas se encuentra la descripción de la precesión en las órbitas y la observación de luz deflectada debido a la presencia del sol. La segunda parte de este trabajo de investigación, que comprende los capítulos 2 y 3, consiste en el desarrollo de los aspectos principales de la Relatividad General, la definición de los objetos matemáticos en los que está basada y la forma de operar con ellos para la obtención de las ecuaciones de campo de la teoría. Se desarrollará la solución más sencilla para las ecuaciones de campo, propuesta en 1916 por **Karl Schwarzschild**, contenido recopilado y presentado por Chandrasekhar, 1986. Se aplicará la solución de Schwarzschild al problema de órbitas planetarias, para finalmente calcular la precesión del perihelio de mercurio.

Hoy en día, a poco más de cien años de la Relatividad General, se siguen observando fenómenos predichos por ella. Ejemplos de ello son la detección de ondas gravitacionales por LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) Abbott y col., 2016 y la observación de la sombra de un agujero negro por EHT, 2019 (Event Horizon Telescope). Estas observaciones han consolidado a RG como la teoría más satisfactoria para describir los fenómenos de la gravedad; sin embargo, a pesar de sus éxitos, existen algunos fenómenos que no encajan en esta descripción. Con la relatividad general no es posible modelar la forma acelerada en que el universo se expande, ni las curvas de rotación de galaxias. Además, existen dificultades para describir esta teoría a nivel cuántico. Lo anterior, entre otras cosas, impide su descripción conjunta con las demás interacciones fundamentales, descritas por el Modelo Estándar de Partículas Fundamentales.

En la actualidad, la humanidad se encuentra tratando de resolver la misma pregunta ¿Cómo describir los efectos de la gravedad? En orden de responderla, se siguen diferentes líneas de investigación. Con el objetivo de desarrollar la teoría cuántica de la gravedad, se tienen formulaciones como las de Loop Quantum Gravity, Boddendorfer, 2016, o Teoría de Cuerdas, Polchinski, 1994, cuyo objetivo es describir a la gravedad como fuerza fundamental. Por otro lado, existe la propuesta de que la gravedad no es una fuerza fundamental, sino emergente. Dicha idea fue propuesta por Verlinde, 2011, quien, realizando una analogía con las fuerzas entrópicas que emergen en experimentos de polímeros con baños de calor, considera a la gravedad como una fuerza entrópica. Siguiendo esta idea, la descripción de la gravedad se hace en un marco mecánico estadístico, por lo que no es necesario cuantizarla.

Para este trabajo, en la parte final se realiza un análisis de las ideas de Verlinde, que permiten obtener la ley de gravitación universal de Newton a partir de una entropía. Como desarrollo central, se propondrá una entropía específica, para la cual se obtendrá la interacción entre dos partículas. Utilizando dicha interacción clásica, se desarrollará el problema de órbitas planetarias, obteniendo una ecuación general para la precesión de las órbitas, con la cual se calculará la precesión para la órbita de Mercurio. Este resultado se cotejará con lo observado y con lo predicho por RG. De este cotejo se obtendrán, como resultado principal, restricciones a los parámetros libres de la entropía propuesta. Siendo la principal motivación de este trabajo, la validación de los términos propuestos como corrección a la entropía para este sistema, revisar la consistencia de esta propuesta con la observación y explorar la concepción de la interacción gravitatoria que este modelo alternativo ofrece.

Capítulo 2

Gravedad Clásica

La mecánica de Newton, junto con su teoría de gravedad, fue hasta principios del siglo XX, la teoría más exitosa para describir el movimiento de los cuerpos y los astros. Publicada por Newton en *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, está basada en tres leyes de movimiento:

1. Sobre los marcos de referencia inerciales, considera que una partícula en reposo o movimiento rectilíneo uniforme, permanecerá en ese estado, a menos que una fuerza actúe sobre ella. Con ello queda establecido que los observadores de esta teoría son todos inerciales.
2. La ecuación para la fuerza $\mathbf{F}$ que siente una partícula de masa m en la posición $\mathbf{r}$, es proporcional a su aceleración $\ddot{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}. \quad (2.1)$$

3. Establece que la fuerza experimentada entre dos partículas 1 y 2, en posiciones $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, respectivamente, es de la misma magnitud, pero de sentido opuesto

$$\mathbf{F}(|\mathbf{r}_{12}|)\hat{\mathbf{r}}_{12} = -\mathbf{F}(|\mathbf{r}_{12}|)\hat{\mathbf{r}}_{21}. \quad (2.2)$$

Donde el vector que conecta ambas partículas es $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y el vector unitario es, por lo tanto, $\hat{\mathbf{r}}_{12} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$.

Newton describió la interacción gravitatoria entre dos partículas de masa m_1 y m_2 , mediante la ecuación

$$\mathbf{F} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \quad (2.3)$$

Donde r es la magnitud del vector que conecta ambas partículas y $\hat{\mathbf{r}}$ su vector unitario. G es la llamada constante de gravitación universal, la cual ha sido determinada experimentalmente y tiene un valor aproximado $G = 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

Como puede observarse en las ecuaciones anteriores, Newton formuló su teoría con base en el cálculo diferencial. Para obtener la ecuación de movimiento de un sistema, las ecuaciones a resolver en mecánica clásica son, por lo general, ecuaciones diferenciales de segundo orden. Esta teoría puede ser tratada en un formalismo Lagrangiano o Hamiltoniano, los cuales se basan en una descripción de la energía del sistema.

El Lagrangiano

$$L = T - V,$$

donde T y V son las energías cinética y potencial del sistema, respectivamente, describe la interacción del sistema y con él pueden obtenerse las ecuaciones de movimiento, mediante la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \quad (2.4)$$

Donde q_i son las coordenadas generalizadas. El Hamiltoniano, se escribe en términos del Lagrangiano como

$$H = p_i \dot{q}_i - L, \quad (2.5)$$

donde p_i son los momentos generalizados $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

En lo que resta de este capítulo se desarrollará el problema de los dos cuerpos en mecánica clásica, utilizando un formalismo Lagrangiano, con base en la notación y secuencia publicada por Thornton y Marion, [5ta ed.](#)

2.1. Fuerza central

En un sistema de dos partículas, se denomina fuerza central a aquella que actúa sobre el vector que conecta los centros de masa de dichas partículas, siendo este vector el único parámetro del que depende la fuerza.

En el escenario en que se tienen dos partículas interactuando bajo una fuerza central, se define un vector de posición para cada partícula respecto del origen y un vector que las conecta. Dichos vectores cumplen la relación

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{r}, \quad (2.6)$$

donde $\mathbf{r}_{12}$ es el vector que conecta los centros de masa de las partículas 1 y 2, con posiciones $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, respectivamente. Generalmente esta fuerza se describe en función del vector $\mathbf{r}_{12}$.

La fuerza central posee las siguientes características:

- La magnitud de la fuerza entre partículas es igual en ambos sentidos, pues teniendo $\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21}$ y utilizando la tercera ley de Newton ([2,2](#)):

$$\mathbf{F}(|\mathbf{r}_{12}|)\hat{r}_{12} = -\mathbf{F}(|\mathbf{r}_{12}|)\hat{r}_{21} = -\mathbf{F}(|\mathbf{r}_{12}|)(-\hat{r}_{12}).$$

- Es una fuerza conservativa, pues puede expresarse como el gradiente de un potencial

$$\mathbf{F} = -\nabla v = - \left(\frac{dv}{dr} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{dv}{d\theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{dv}{d\phi} \hat{\phi} \right),$$

entonces, de la definición de fuerza central, que es independiente de los ángulos, se tiene

$$F(r)\hat{r} = -\frac{dv}{dr}\hat{r},$$

$$v(r) = - \int F(r)dr.$$

2.2. El problema de dos cuerpos

Para el problema de dos cuerpos bajo un potencial central, se tienen 6 grados de libertad (las tres componentes espaciales de cada partícula). Al ser el centro de masa (CM) la cantidad que relaciona ambas partículas, conviene describir al sistema en términos de la posición de éste,

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Si se escribe la relación anterior en términos del vector que une los centros de masa $\mathbf{r}$, las posiciones de las partículas se escriben como

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (2.7)$$

Entonces, el Lagrangiano para este sistema es

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 - v(r). \quad (2.8)$$

Donde $v(r)$ es el potencial. En términos de la ec. (2,7)

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 m_2} \right) \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 m_2} \right) \dot{\mathbf{r}}^2 - v(r) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \dot{\mathbf{r}}^2 - v(r). \end{aligned}$$

Luego, definiendo

$$M \equiv m_1 + m_2, \quad \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

como la masa total y masa reducida, respectivamente,

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - v(r). \quad (2.9)$$

Puede observarse de la ecuación anterior que $\mathbf{R}$ es una coordenada cíclica (que no aparece explícitamente en el Lagrangiano) por lo que, en la ecuación de Euler-Lagrange (2,4)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} \right) &= \frac{d}{dt} (M \dot{\mathbf{R}}) = 0, \\ \Rightarrow M \dot{\mathbf{R}} &= cte \equiv \mathbf{P}_R. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Reescribiendo la cantidad de momento lineal $\mathbf{P}_R$, se obtiene

$$\mathbf{P}_R \equiv M \dot{\mathbf{R}} = (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2.$$

Puede verse que el momento lineal total es conservado, lo que implica que el centro de masa se mueve a velocidad constante.

Con base en el principio de relatividad de Galileo, es posible fijar el sistema de referencia sobre el centro de masa, definiendo la posición de éste como el origen en la ecuación de movimiento, donde

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \dot{\mathbf{R}}_0(t - t_0) = 0.$$

Por lo que, los vectores posición de la ec. (2,7) se vuelven

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (2.11)$$

Entonces, (2,9) se reescribe como

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - v(r), \quad (2.12)$$

De la ecuación anterior, si se considera el caso $m_2 \gg m_1$:

$$\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow m_1.$$

El problema se reduce al de un solo cuerpo orbitando alrededor del origen.

Por otro lado, si se deriva la definición del momento angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Considerando los productos vectoriales de la ecuación anterior, $\mathbf{v} \times \mathbf{p}$ se anula, dada la definición del momento lineal, donde $\mathbf{v}$ es paralelo a $\mathbf{p}$. $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ se anula al ser el caso de una fuerza central, donde $\mathbf{r}$ es paralelo a $\mathbf{F}$. Entonces

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0. \quad (2.13)$$

Si el momento angular se conserva, como en la ecuación anterior, la dinámica del sistema puede describirse sobre un plano, por lo que es conveniente reescribir la posición $\mathbf{r}$ en un sistema de coordenadas polares.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

El Lagrangiano (2,9) para este sistema coordenado es

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - v(r), \quad (2.14)$$

donde ahora θ es una coordenada cíclica (que no aparece explícitamente en el Lagrangiano), entonces

$$\begin{aligned} P_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = cte, \\ \Rightarrow \mu r^2 \dot{\theta} &= l, \end{aligned} \quad (2.15)$$

que es la expresión para el momento angular conservado, en coordenadas polares.

En este punto, si se considera el área de barrido, como se observa en la siguiente

imagen

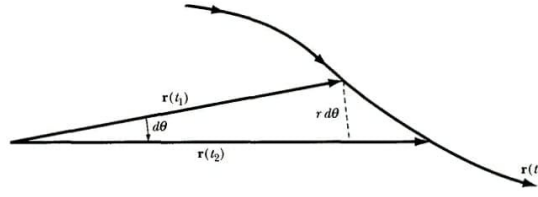


FIGURA 2.1: Área de barrido.

se puede escribir la relación

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta.$$

Derivando esta ecuación respecto del tiempo,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\theta},$$

la cual se denomina *Velocidad areal*. Finalmente, usando (2,15)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu}. \quad (2.16)$$

Esta ecuación indica que la velocidad de área es una cantidad conservada, es decir, que el movimiento del sistema abarca áreas iguales para tiempos iguales. La afirmación anterior es conocida como la **Segunda Ley de Kepler**.

2.2.1. Energía del sistema

Escribiendo (2,14) en el formalismo Hamiltoniano, usando (2,5)

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + v(r). \quad (2.17)$$

Donde E es constante, pues el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo. Si se identifica el primer término del Hamiltoniano como la energía cinética, entonces se considera al segundo término como parte del potencial. Dicho término es denominado potencial centrífugo. La fuerza ejercida debido a este potencial es

$$F_c = -\nabla v_c = -\frac{\partial v_c}{\partial r} = \frac{l^2}{\mu r^3},$$

la cual, en términos de (2,15)

$$F_c = \mu r \dot{\theta}^2, \quad (2.18)$$

es la denominada **Fuerza centrífuga**.

El potencial completo es denominado potencial efectivo

$$v_{eff} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + v(r).$$

Ahora, si se considera un potencial central atractivo de la forma $v(r) = -\frac{k}{r}$, donde k es una constante genérica, al graficar el potencial efectivo se obtiene lo siguiente

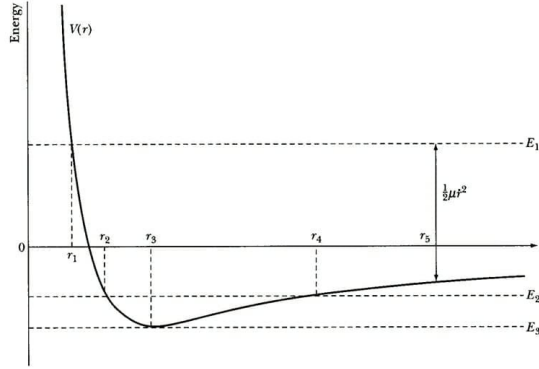


FIGURA 2.2: Potencial efectivo

Nótese que la energía mínima del sistema es la energía para el punto mínimo del potencial, el cual se denota v_{min} . Dado que la energía cinética siempre es mayor o igual a cero, no existe un caso como $E < v_{min}$. Para los demás casos, de (2.2), se tiene lo siguiente:

- Si $E = v_{min} \rightarrow r = r_3$. El movimiento describe órbitas de radio fijo.
- Si $v_{min} < E < 0 \rightarrow r_{min} < r < r_{max}$. El movimiento descrito es de órbitas con un radio delimitado entre un valor máximo y uno mínimo.
- Si $E > 0 \rightarrow r_{min} < r < \infty$. La órbita descrita tiene un radio caracterizado únicamente por una cota inferior.

Los dos primeros casos representan estados ligados y el último representa un estado no ligado.

2.2.2. Ecuación de movimiento

En orden de obtener la ecuación de movimiento, primera integral de la energía, se reescribe (2.17) como

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 &= E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - v(r), \\
 \Rightarrow \dot{r}^2 &= \frac{2}{\mu} \left[E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - v(r) \right], \\
 \Rightarrow \dot{r} &= \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - v(r)] - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}}.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Por conveniencia, se escribe la trayectoria como una función $\theta(r)$, para después invertir y obtener una trayectoria $r(\theta)$, entonces

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}},$$

Luego, usando (2,15)

$$d\theta = \frac{l}{\mu r^2} \frac{1}{\dot{r}} dr.$$

Finalmente, sustituyendo (4,9) en la relación anterior,

$$d\theta = \frac{\frac{l}{\mu r^2} dr}{\pm \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - v(r)] - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}}}, \quad (2.20)$$

que es la ecuación diferencial a resolver.

Se resuelve el caso de un potencial atractivo tipo $v(r) = -\frac{k}{r}$ y se toma la raíz positiva en el denominador, entonces

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{r_0}^r \frac{\frac{l}{\mu r^2} dr}{\left[\frac{2}{\mu} \left(E + \frac{k}{r} \right) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2} \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.21)$$

con el valor fijo $\theta_0 = 0$. Luego, se introduce la variable

$$u = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{dr}{r^2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \theta &= \int_{u_{min}}^u \frac{-\frac{l}{\mu} du}{\left[\frac{2}{\mu} (E + ku) - \frac{l^2 u^2}{\mu^2} \right]^{\frac{1}{2}}}, \\ \theta &= -\frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{u_{min}}^u \frac{du}{\sqrt{E + ku - \frac{l^2}{2\mu} u^2}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Nótese que la ecuación anterior tiene la forma de la siguiente integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left(-\frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right) + c,$$

para $a < 0$. Para el caso de la ecuación (2,22), la solución se escribe como

$$\theta = -\arcsin \left(-\frac{\frac{l^2}{\mu} u - k}{\sqrt{k^2 + \frac{l^2 E}{\mu}}} \right) - c.$$

$$\Rightarrow \sin [-(\theta + c)] = -\frac{\frac{l^2}{\mu}u - k}{\sqrt{k^2 + \frac{2l^2 E}{\mu}}}.$$

Utilizando la propiedad impar de la función seno y eligiendo la constante $c = \frac{\pi}{2}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \text{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) &= \cos(\theta), \\ \Rightarrow \cos(\theta) &= \frac{\frac{l^2}{\mu k}u - 1}{\sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{\mu k^2}}}. \end{aligned}$$

Finalmente, se definen los términos

$$\alpha \equiv \frac{l^2}{\mu k}, \quad \epsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}. \quad (2.23)$$

como *latus rectum* y *excentricidad*, respectivamente, los cuales se identifican con las propiedades geométricas de la curva. Por lo tanto, la ecuación de movimiento es

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \epsilon \cos \theta. \quad (2.24)$$

La trayectoria de una partícula en este sistema es la ecuación para secciones cónicas, en coordenadas polares y con foco en el origen.

2.2.3. Análisis

Tomando diferentes casos para la energía en relación con la excentricidad de las curvas ϵ , definida en (2,23), se tienen los siguientes resultados:

- Si $E = v_{min} \rightarrow \epsilon = 0 \rightarrow$ la trayectoria describe una circunferencia.
- Si $v_{min} < E < 0 \rightarrow 0 < \epsilon < 1 \rightarrow$ La trayectoria describe una elipse
- si $E = 0 \rightarrow \epsilon = 1 \rightarrow$ La trayectoria describe una parábola.
- Si $E > 0 \rightarrow \epsilon > 1 \rightarrow$ La trayectoria describe una hipérbola.

El primer par de casos corresponde a estados ligados y el segundo par, a estados no ligados. Al compararse con lo observado para órbitas planetarias, se deduce que éstas pertenecen al segundo caso, es decir, que las trayectorias de los planetas describen elipses. La afirmación anterior se conoce como la **Primera Ley de Kepler**.

Para los casos de estados ligados, donde $\theta \in [0, 2\pi)$, se obtienen los radios máximo y mínimo de la ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} r_{min} &= r(\theta = 0) = \frac{\alpha}{1 + \epsilon}. \\ r_{max} &= r(\theta = \pi) = \frac{\alpha}{1 - \epsilon}. \end{aligned}$$

El semieje mayor se define como

$$a = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2} = \frac{k}{2|E|},$$

y el semieje menor,

$$b = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}.$$

Para describir el período de revolución, se escribe la segunda ley de Kepler (2,16) como una integral en el tiempo,

$$\int_0^\tau dt = \frac{2\mu}{l} \int_0^A dA.$$

Siendo el área de la elipse $A = \pi ab$ y sustituyendo los valores de los semiejes en la integral,

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2\mu}{l} A = \frac{2\mu}{l} \pi \frac{k}{2|E|} \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}} \\ &= \pi k \sqrt{\frac{\mu}{2}} |E|^{-3/2}. \end{aligned}$$

Por otro lado, los parámetros de la elipse cumplen también la relación

$$b = \sqrt{\alpha a}.$$

Utilizando esta última, junto con la definición de α , se tiene finalmente

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2\mu}{k} a^3. \quad (2.25)$$

Conocida como la **Tercera Ley de Kepler**.

De la *Ley de Gravitación Universal*, se toma el valor $k = Gm_1m_2$. Utilizando el límite $m_1 \ll m_2$, donde m_2 es la masa del sol $M_\odot$, se tiene que para el sistema solar

$$\tau^2 = \frac{4\pi a^3}{GM_\odot}.$$

En resumen, mediante el tratamiento clásico de una fuerza central general para un potencial tipo $v = -\frac{k}{r}$, la ecuación de movimiento resultante es la ecuación de secciones cónicas. Luego, mediante la evaluación cualitativa del potencial efectivo en función de la energía, se obtiene el tipo de trayectoria seguida por una partícula en este sistema.

Como se mencionó durante el desarrollo, del tratamiento de este problema surgen las tres **Leyes de Kepler**:

1. Los planetas se mueven en órbitas elípticas con el sol en uno de sus focos (análisis de excentricidades).
2. El área barrida por unidad de tiempo, por el radio que va del sol a uno de los planetas, es constante (2,16).

3. El cuadrado del período de un planeta es proporcional al cubo del semieje mayor (2,25).

Capítulo 3

Relatividad General

La teoría de gravedad con la que se modela al universo hoy en día es la Relatividad General. Dentro de la formulación clásica existen transformaciones entre observadores inerciales que dejan invariantes a las ecuaciones de movimiento, llamadas transformaciones de Galileo. Dichas transformaciones, introducidas por Galileo Galilei en 1638, inducen cambios entre sistemas de referencia desde los cuales las ecuaciones de movimiento aparecen equivalentes. Más de 200 años después, **James Clerk Maxwell** publicó sus ecuaciones para la descripción del electromagnetismo, donde estableció que los campos eléctricos y magnéticos se propagan a la velocidad de la luz. Más tarde, en 1887, con el experimento realizado por Michelson y Morley, se estableció que la velocidad de la luz tiene un valor finito, el cual se aproximó a $3 \times 10^8 \frac{m}{s}$.

Tratando de generalizar la invariancia de las ecuaciones de movimiento a transformaciones entre observadores no inerciales, descritas por las **transformaciones de Lorentz**, se observó que las ecuaciones de Maxwell cumplían con dicha invariancia, pero no las de Newton. En orden de establecer una formulación consistente, Einstein desarrolló en 1905 la teoría de la Relatividad Especial, bajo los siguientes postulados:

- Las ecuaciones de movimiento deben ser invariantes bajo transformaciones entre observadores no inerciales.
- Ningún cuerpo puede viajar a una velocidad mayor a la de la luz en el vacío.

Después, con el objetivo de formular una teoría relativista de la gravedad, Einstein estableció varios principios sobre el comportamiento de los cuerpos en presencia de campos gravitatorios, que interactúan con las partículas mediante su masa. La *masa inercial* de una partícula es la que se opone al movimiento y que aparece en la segunda ley de Newton (2,1). La *masa gravitacional* es la relacionada con la interacción de una partícula con un campo gravitacional. En esta definición puede distinguirse entre la fuente del campo gravitacional, denominada masa gravitacional pasiva y la masa encargada de interactuar con el campo, llamada masa gravitacional activa. En la teoría Newtoniana se utiliza la masa inercial y la masa gravitacional de manera indistinta, aunque no tendría por qué ser así. Mediante una serie de experimentos pensados, Einstein demostró que las dos clasificaciones para la masa, inercial y gravitacional, se refieren a la misma cantidad física, estableciendo así el **principio de equivalencia**.

Con base en el principio de equivalencia y en la relatividad especial, Einstein desarrolló su teoría relativista de la gravedad, publicada en 1915, donde se considera al espacio y al tiempo como un solo ente denominado espacio-tiempo. Esta teoría fue desarrollada utilizando un formalismo tensorial. Con el objetivo de entender la concepción de la interacción gravitatoria de la relatividad general, durante este capítulo

se introducirán los conceptos fundamentales de esta teoría, con los cuales se trabajará para obtener las ecuaciones de campo y su solución para el sistema más sencillo. La secuencia y notación utilizada durante este capítulo está basada en la utilizada por d'Inverno, 1998.

3.1. La métrica

Se define a la métrica como un tensor covariante de rango 2 aplicado para establecer el intervalo (distancia) entre dos puntos cercanos o eventos,

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b, \quad (3.1)$$

donde ds^2 es el elemento de línea y g_{ab} es la métrica. Este tensor es simétrico y tiene determinante

$$g = \det(g_{ab}).$$

Si la métrica posee determinante distinto de cero, existe su inversa, la cual es definida como

$$g_{ab}g^{bc} = \delta_a^c. \quad (3.2)$$

Siendo δ_a^c la delta de Kronecker. La derivada covariante de la métrica es

$$\nabla_c g_{ab} = \partial_c g_{ab} - \Gamma_{ac}^d g_{db} - \Gamma_{bc}^d g_{ad}, \quad (3.3)$$

donde la conexión afín es representada por el símbolo de Christoffel de segunda especie

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}). \quad (3.4)$$

Entonces, utilizando las dos ecuaciones anteriores

$$\begin{aligned} \nabla_c g_{ab} &= \partial_c g_{ab} - \frac{1}{2}g^{de}(\partial_a g_{ec} + \partial_c g_{ae} - \partial_e g_{ac})g_{db} - \frac{1}{2}g^{de}(\partial_b g_{ec} + \partial_c g_{be} - \partial_e g_{bc})g_{ad} \\ &= \partial_c g_{ab} - \frac{1}{2}[\delta_b^e(\partial_a g_{ec} + \partial_c g_{ae} - \partial_e g_{ac}) + \delta_a^e(\partial_b g_{ec} + \partial_c g_{be} - \partial_e g_{bc})] \\ &= \partial_c g_{ab} - \frac{1}{2}(\partial_a g_{bc} + \partial_c g_{ab} - \partial_b g_{ac} + \partial_b g_{ac} + \partial_c g_{ba} - \partial_a g_{bc}) \\ &= \partial_c g_{ab} - \frac{1}{2}(2\partial_c g_{ba}). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\nabla_c g_{ab} = 0. \quad (3.5)$$

Luego, si se introduce este resultado en la ec. (3.3),

$$\partial_c g_{ab} = \Gamma_{ac}^d g_{db} - \Gamma_{bc}^d g_{ad}. \quad (3.6)$$

Puede entonces escribirse el siguiente **Teorema1**: Si ∇_a denota la derivada covariante respecto de la conexión afín, la condición necesaria y suficiente para que la derivada covariante de la métrica se anule, es que la conexión afín sea la conexión métrica dada por (3.4).

Considerando la relación (3.2), puede verse que

$$\nabla_c g^{ab} = 0, \quad (3.7)$$

$$\nabla_c \delta_b^a = 0. \quad (3.8)$$

Ahora, se introducen los tensores constituidos por derivadas de la métrica:

Tensor de Riemann

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a. \quad (3.9)$$

Tensor y escalar de Ricci

$$R_{ab} = R_{acb}^c, \quad R = g^{ab} R_{ab}. \quad (3.10)$$

Tensor de Einstein

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R. \quad (3.11)$$

Teniendo las definiciones anteriores, se escribe el **Teorema 2**: La condición necesaria y suficiente para que la métrica sea plana es que el tensor de Riemann se anule en todos los puntos de la variedad.

Una métrica plana siempre puede diagonalizarse con entradas ± 1 . Este tipo de métrica cumple

$$\partial_c g_{ab} = 0. \quad (3.12)$$

Se sigue entonces, de su definición, que para métricas planas, $\Gamma_{bc}^a = 0$.

3.2. Densidades tensoriales

Se define el concepto de densidad tensorial como aquel objeto que transforma como tensor y que tiene como factor una potencia del Jacobiano,

$$\mathfrak{Z}_{b\dots}^{a\dots} = J^w \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \dots \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} \dots \mathfrak{Z}_{d\dots}^{c\dots},$$

donde el Jacobiano es $J = \left| \frac{dx^a}{dx'^b} \right|$ y la potencia w es denominada peso. Fácilmente, puede observarse que el producto de dos densidades tensoriales de pesos w_1 y w_2 será una densidad tensorial de peso $w_1 + w_2$.

La derivada covariante de una densidad tensorial es

$$\nabla_c \mathfrak{Z}^a = \partial_c \mathfrak{Z}^a + \Gamma_{bc}^a \mathfrak{Z}^b - w \Gamma_{bc}^b \mathfrak{Z}^a. \quad (3.13)$$

Como puede observarse, esta derivada tiene los términos usuales de la derivada covariante de un tensor, menos un término proporcional a su peso w . En particular, para el caso $w = 1$ y $c = a$:

$$\begin{aligned} \nabla_a \mathfrak{Z}^a &= \partial_a \mathfrak{Z}^a + \Gamma_{ba}^a \mathfrak{Z}^b - \Gamma_{ba}^b \mathfrak{Z}^a, \\ \Rightarrow \nabla_a \mathfrak{Z}^a &= \partial_a \mathfrak{Z}^a. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Para continuar estableciendo las propiedades del tensor métrico, se escribe su cambio ante las transformaciones de coordenadas $x^a \rightarrow x'^a$:

$$g'_{ab}(x) = \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} g_{cd}(x). \quad (3.15)$$

Luego, tomando el determinante de cada lado en la ecuación anterior,

$$g' = J^2 g.$$

De esta ecuación puede notarse que el determinante de la métrica es una densidad escalar de peso 2. Para todo el desarrollo que se hará a continuación, se usará una métrica de signatura negativa, por lo que, para asegurar que la transformación de los determinantes sea positiva, se escribe

$$(-g') = J^2(-g).$$

tomando la raíz cuadrada de la ecuación anterior

$$(-g')^{1/2} = J(-g)^{1/2}. \quad (3.16)$$

Evidentemente, la cantidad $(-g)^{1/2}$ es una densidad escalar de peso 1, entonces, considerando (3.14) se escribe

$$\nabla_a [(-g)^{1/2} T^a] = \partial_a [(-g)^{1/2} T^a].$$

Ahora, se analiza el caso para una matriz general $A = a_{ij}$, cuya matriz inversa está definida por

$$(b_{ij}) = \frac{(A^{ij})^T}{a} = \frac{(A^{ji})}{a}, \quad (3.17)$$

donde $a = \det(A)$ y A^{ij} es la matriz de cofactores.

Fijando el índice i para el determinante,

$$a = \sum_{j=1}^n a_{ij} A^{ij}.$$

Luego, tomando la derivada parcial con respecto de a_{ij} en la ecuación anterior,

$$\frac{\partial a}{\partial a_{ij}} = A^{ij}. \quad (3.18)$$

Si se repite el proceso para cada i , puede verse que la ecuación anterior se cumple de manera general. Entonces, escribiendo el determinante como función de las coordenadas,

$$a = a(a_{ij}(x^k)).$$

Derivando parcialmente la relación anterior, respecto de x^k :

$$\frac{\partial a}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} [a(a_{ij}(x^k))],$$

$$\frac{\partial a}{\partial x^k} = \frac{\partial a}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = A^{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k},$$

donde se ha utilizado la ec. (3,18). Entonces, utilizando (3,17),

$$\frac{\partial a}{\partial x^k} = a^{ji} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}.$$

Aplicando el resultado anterior a la métrica, se tiene

$$\partial_c g = g g^{ab} \partial_c g_{ab}, \quad (3.19)$$

y sustituyendo (3,6),

$$\begin{aligned} \partial_c g &= g g^{ab} (\Gamma_{ac}^d g_{db} - \Gamma_{bc}^d g_{ad}) \\ &= g \delta_d^a \Gamma_{ac}^d + g \delta_d^b \Gamma_{bc}^d \\ &= 2g \Gamma_{ac}^a. \end{aligned}$$

Por otro lado, siendo g una densidad escalar de peso 2, su derivada covariante es

$$\nabla_c g = \partial_c g - 2g \Gamma_{ac}^a.$$

Finalmente, utilizando los resultados anteriores, la derivada covariante de g es

$$\nabla_c g = 0. \quad (3.20)$$

y, de la misma forma, para la densidad escalar de peso 1,

$$\partial_c (-g)^{1/2} = \nabla_c (-g)^{1/2} = 0. \quad (3.21)$$

3.3. Isometrías

Continuando con la derivación de herramientas para construir las ecuaciones de campo, se analizan las transformaciones de la métrica y, en particular, las transformaciones bajo las cuales permanece invariante.

Se dice que la métrica g_{ab} es invariante ante la transformación $x^a \rightarrow x'^a$, si

$$g'_{ab}(x) = g_{ab}(x),$$

para toda coordenada x^c . Dicha transformación es denominada **isometría**.

Escribiendo explícitamente la transformación general para g_{ab} ,

$$g_{ab}(x) = \frac{\partial x'^c}{\partial x^a} \frac{\partial x'^d}{\partial x^b} g'_{cd}(x'),$$

se tiene que la transformación $x^a \rightarrow x'^a$ es una isometría si

$$g_{ab}(x) = \frac{\partial x'^c}{\partial x^a} \frac{\partial x'^d}{\partial x^b} g_{cd}(x'), \quad (3.22)$$

es decir, si cambian las coordenadas, pero no la relación de distancia entre ellas. Para simplificar la condición anterior, se considera la transformación infinitesimal

$$x^a \rightarrow x'^a = x^a + \varepsilon X^a,$$

donde $\varepsilon \ll 1$ y X^a es un campo vectorial. Derivando esta transformación, se obtiene

$$\frac{\partial x'^a}{\partial x^b} = \frac{\partial}{\partial x^b}(x^a + \varepsilon X^a) = \delta_b^a + \varepsilon \partial_b X^a(x),$$

y, sustituyendo en la transformación (3,22),

$$g_{ab}(x) = (\delta_a^c + \varepsilon \partial_a X^c)(\delta_b^d + \varepsilon \partial_b X^d) g_{cd}(x^e + \varepsilon X^e).$$

Luego, usando el teorema de Taylor para la métrica g_{cd} de la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} g_{ab}(x) &= (\delta_a^c + \varepsilon \partial_a X^c)(\delta_b^d + \varepsilon \partial_b X^d) [g_{cd}(x) + \varepsilon X^e \partial_e g_{cd}(x) + \dots] \\ &= g_{ab}(x) + \varepsilon [X^e \partial_e g_{ab} + g_{ad} \partial_b X^d + g_{bd} \partial_a X^d] + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

al renombrar los índices en el último término. Permaneciendo a orden ε ,

$$X^e \partial_e g_{ab} + g_{ad} \partial_b X^d + g_{bd} \partial_a X^d = 0.$$

Nótese que los elementos obtenidos para esta ecuación, son los términos de la derivada de Lie $L_X g_{ab}$.

Finalmente, cambiando las derivadas por derivadas covariantes,

$$L_X g_{ab} = X^e \nabla_e g_{ab} + g_{ad} \nabla_b X^d + g_{bd} \nabla_a X^d = 0,$$

y usando el resultado (3,5)

$$L_X g_{ab} = \nabla_b (g_{ad} X^d) + \nabla_a (g_{bd} X^d) = 0.$$

Por lo tanto

$$L_X g_{ab} = \nabla_a X_b + \nabla_b X_a = 0. \quad (3.23)$$

Esta ecuación es conocida como **ecuación de Killing**. Las soluciones X^a para dicha ecuación (campos de Killing) son los que dejan invariante a la métrica.

Se establece entonces el **Teorema 3**: Una isometría infinitesimal es generada por un vector de Killing $X^a(x)$ que satisface

$$L_X g_{ab} = 0.$$

3.4. Ecuación de Palatini

En orden de simplificar el tratamiento de las ecuaciones, se elige trabajar en un sistema de coordenadas geodésicas en el que $\Gamma_{bc}^a = 0$ para un punto P.

En este caso, la derivada covariante se vuelve

$$\nabla_a T^b = \partial_a T^b, \quad (3.24)$$

y el tensor de Riemann (3,9), se vuelve

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a. \quad (3.25)$$

Se considera ahora una variación a la conexión de la siguiente forma

$$\Gamma_{bc}^a \rightarrow \bar{\Gamma}_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a + \delta \Gamma_{bc}^a,$$

lo que induce el siguiente cambio en el tensor de Riemann

$$\begin{aligned} R_{bcd}^a \rightarrow \bar{R}_{bcd}^a &= \partial_c (\Gamma_{bd}^a + \delta \Gamma_{bd}^a) - \partial_d (\Gamma_{bc}^a + \delta \Gamma_{bc}^a) \\ &= \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \partial_c \delta \Gamma_{bd}^a - \partial_d \delta \Gamma_{bc}^a \\ &= R_{bcd}^a + \delta R_{bcd}^a. \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación (3,24), se escribe δR_{bcd}^a como

$$\delta R_{bcd}^a = \nabla_c \delta \Gamma_{bd}^a - \nabla_d \delta \Gamma_{bc}^a.$$

Dado que la ecuación anterior es tensorial y usando el hecho de que toda ecuación tensorial debe cumplirse en cualquier sistema de referencia, se establece la **ecuación de Palatini**

$$\delta R_{bcd}^a = \nabla_c (\delta \Gamma_{bd}^a) - \nabla_d (\delta \Gamma_{bc}^a), \quad (3.26)$$

para un punto arbitrario. Contrayendo los índices a y c de la ecuación anterior,

$$\delta R_{bd} = \nabla_a (\delta \Gamma_{bd}^a) - \nabla_d (\delta \Gamma_{ba}^a). \quad (3.27)$$

3.5. Restricciones diferenciales a las ecuaciones de campo

Se busca que la Lagrangiana de la teoría $\mathcal{L}$ dependa de la métrica y sus derivadas

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{ab}, \partial_c g_{ab}, \partial_d \partial_c g_{ab}, \dots).$$

$\mathcal{L}$ debe ser una densidad escalar de peso 1, para escribir la acción integral (que es un escalar) como

$$I = \int_{\Omega} \mathcal{L} d\Omega, \quad (3.28)$$

sobre una región Ω de la variedad. $d\Omega$ es una densidad escalar de peso -1.

Del **principio de acción estacionaria** se establece que al hacer variaciones arbitrarias de la métrica que resulten anularse en la frontera $\partial\Omega$, la acción debe ser estacionaria, es decir

$$g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \delta g_{ab}, \quad \Rightarrow \quad I \rightarrow I + \delta I,$$

con

$$\delta I = 0. \quad (3.29)$$

De (3,28) se puede escribir

$$\delta I = \int_{\Omega} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{ab}} \delta g_{ab} d\Omega,$$

y definiendo

$$\mathcal{L}^{ab} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{ab}},$$

$$\Rightarrow \delta I = \int_{\Omega} \mathcal{L}^{ab} \delta g_{ab} d\Omega = 0. \quad (3.30)$$

Dado que la variación de la métrica y la región de integración son arbitrarias, para la integral anterior debe cumplirse

$$\mathcal{L}^{ab} = 0. \quad (3.31)$$

Otra de las propiedades de $\mathcal{L}^{ab}$ es que es un tensor simétrico al depender de g_{ab} .

Ahora, se realiza una variación en g_{ab} , mediante un cambio de coordenadas en la región Ω . Considerando la transformación infinitesimal de coordenadas

$$x^a \rightarrow x'^a = x^a + \varepsilon X^a(x),$$

donde $X^a(x)$ es un campo vectorial suave que se anula en la frontera de Ω y el parámetro $\varepsilon \ll 1$.

Del desarrollo en la sección de isometrías y, en particular, del resultado (3.23)

$$\delta g_{ab} = -\mathcal{L}_{\varepsilon X} g_{ab} = -\varepsilon(\nabla_b X_a + \nabla_a X_b).$$

Sustituyendo la relación anterior en (3.30),

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{\Omega} \mathcal{L}^{ab} [-\varepsilon(\nabla_b X_a + \nabla_a X_b)] d\Omega = 0, \\ \Rightarrow \delta I &= -2\varepsilon \int_{\Omega} \mathcal{L}^{ab} (\nabla_b X_a) d\Omega = 0, \end{aligned}$$

dado que $\mathcal{L}^{ab}$ es simétrico. Luego, usando

$$\begin{aligned} \nabla_b (\mathcal{L}^{ab} X^a) &= \nabla_b (\mathcal{L}^{ab}) X^a + \mathcal{L}^{ab} \nabla_b (X^a), \\ \Rightarrow \delta I &= 2\varepsilon \int_{\Omega} \nabla_b (\mathcal{L}^{ab}) X_a d\Omega - 2\varepsilon \int_{\Omega} \nabla_b (\mathcal{L}^{ab} X_a) d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Puede verse en el segundo término de la ecuación anterior, que $\mathcal{L}^{ab} X_a$ debe ser una densidad tensorial de peso 1. Entonces

$$2\varepsilon \int_{\Omega} \nabla_b (\mathcal{L}^{ab}) X_a d\Omega = 2\varepsilon \int_{\Omega} \partial_b (\mathcal{L}^{ab} X_a) d\Omega, \quad (3.32)$$

dada la condición (3.14). Utilizando el teorema de la divergencia

$$\int_{\partial\Omega} \mathfrak{T}^a dS_a = \int_{\Omega} \partial \mathfrak{T}^a d\Omega, \quad (3.33)$$

se reescribe la ec. (3.32) como

$$2\varepsilon \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}^{ab} X_a dS_b = 2\varepsilon \int_{\Omega} \partial_b (\mathcal{L}^{ab} X_a) d\Omega.$$

Luego, sabiendo que el campo X_a se anula en la frontera $\partial\Omega$,

$$\Rightarrow 2\varepsilon \int_{\Omega} \partial_b (\mathcal{L}^{ab}) X_a d\Omega = 0,$$

utilizando (3,31). finalmente, considerando que la región Ω es arbitraria, así como el campo X_a , se concluye

$$\nabla_b \mathcal{L}^{ab} = 0. \quad (3.34)$$

Teniendo los resultados anteriores, se propone el Lagrangiano más simple que puede construirse con un tensor de peso 1 y que dependa de la métrica:

$$\mathcal{L}(g_{ab}) = (-g)^{1/2}. \quad (3.35)$$

Utilizando la ecuación (3,18), se tiene

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ab}} = g g^{ab}. \quad (3.36)$$

Con la misma relación para $(-g)^{1/2}$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial(-g)^{1/2}}{\partial g_{ab}} &= \frac{\partial(-g)^{1/2}}{\partial(-g)} \frac{\partial(-g)}{\partial g_{ab}} \\ &= \frac{1}{2}(-g)^{-1/2}(-g)g^{ab} \\ &= \frac{1}{2}g^{ab}, \end{aligned}$$

definiendo

$$(-g)^{1/2}g^{ab} \equiv g^{ab}. \quad (3.37)$$

Puede verse que

$$\text{si } \mathcal{L}(g_{ab}) = (-g)^{1/2}, \Rightarrow \mathcal{L}^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{ab}} = \frac{1}{2}g^{ab} \neq 0.$$

Esta condición es una contradicción a (3,31), por lo tanto

$$\mathcal{L}(g_{ab}) \neq (-g)^{1/2}.$$

Finalmente, dado que las derivadas covariantes de $(-g)^{1/2}$ y g^{ab} se anulan,

$$\nabla_b g^{ab} = 0. \quad (3.38)$$

El siguiente Lagrangiano más sencillo que puede proponerse (y con el que se trabajará de ahora en adelante) es

$$\mathcal{L}(g_{ab}) = (-g)^{1/2}R, \quad (3.39)$$

conocido como **Lagrangiano de Einstein**.

3.6. Ecuaciones de campo

Se utilizará el formalismo de Palatini, donde se escribe el Lagrangiano de Einstein como función de la métrica y una conexión arbitraria

$$\mathcal{L}_G = \mathcal{L}_G(g^{ab}, \Gamma_{bc}^a, \partial_d \Gamma_{bc}^a).$$

donde, el Lagrangiano (3,39) se escribe como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_G &= g^{ab} R_{ab} \\ &= g^{ab} (\partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_d \Gamma_{ad}^d + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{cd}^d - \Gamma_{ac}^d \Gamma_{bd}^c),\end{aligned}$$

dada la definición (3,37).

La variación del Lagrangiano se realiza en dos partes. Primero se considera la variación a g^{ab} :

$$\delta I = \int_{\Omega} \delta g^{ab} R_{ab} d\Omega = 0.$$

Debido a que la región Ω y la variación δg^{ab} son arbitrarias, el tensor de Ricci debe cumplir

$$R_{ab} = 0. \quad (3.40)$$

Si R_{ab} cumple lo anterior, entonces $R = 0$ y, de la ec. (3,11),

$$G_{ab} = 0. \quad (3.41)$$

Entonces, su derivada covariante

$$\nabla_c G_{ab} = 0. \quad (3.42)$$

La ecuación anterior es la denominada **ecuación de campo para el vacío**.

Ahora, se toma la variación respecto de Γ_{bc}^a :

$$\delta I = \int_{\Omega} g^{ab} \delta R_{ab} d\Omega = \int_{\Omega} g^{ab} \nabla_c (\delta \Gamma_{ab}^c) - \nabla_b (\delta \Gamma_{ac}^c) d\Omega,$$

de la ecuación (3,27). Reescribiendo la ecuación anterior como integración por partes,

$$\delta I = \int_{\Omega} \left[\nabla_c (g^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c) - \nabla_c (g^{ab}) \delta \Gamma_{ab}^c - \nabla_b (g^{ab} \delta \Gamma_{ac}^c) + \nabla_c (g^{ab}) \delta \Gamma_{ab}^c \right] d\Omega.$$

Luego, con un procedimiento análogo al de la sección anterior, se escriben los términos primero y tercero como integrales de superficie, mediante el teorema de la divergencia (3,33), los cuales se anulan en la frontera $\partial\Omega$. Quedando

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{\Omega} \left[\nabla_c (g^{ab}) \delta \Gamma_{ab}^c - \nabla_c (g^{ab}) \delta \Gamma_{ab}^c \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[(\delta_c^b \nabla_d g^{ab} - \nabla_c g^{ab}) \delta \Gamma_{ab}^c \right] d\Omega.\end{aligned}$$

Dado que la variación de la acción debe anularse para un volumen arbitrario, el argumento de la integral

$$(\delta_c^b \nabla_d g^{ab} - \nabla_c g^{ab}) \delta \Gamma_{ab}^c = 0,$$

y como el tensor Γ_{ab}^c es simétrico en los índices inferiores, solo la parte simétrica de la ecuación entre paréntesis se anula, es decir

$$\frac{1}{2} (\delta_c^b \nabla_d g^{ab} - \delta_c^a \nabla_d g^{bd}) - \nabla_c g^{ab} = 0.$$

Para que la relación anterior se cumpla, debe cumplirse $\nabla_c g^{ab} = 0$, condición que ocurre solo si $\nabla_c g_{ab} = 0$, como se vió en las secciones anteriores. Entonces, del **Teorema 1** se deduce que Γ_{bc}^a debe ser la conexión métrica.

Ahora, para obtener las ecuaciones de campo con fuentes, se agrega un término de interacción al Lagrangiano

$$I = \int_{\Omega} (\mathcal{L}_G + k\mathcal{L}_M) d\Omega.$$

Considerando que el Lagrangiano depende de la métrica y sus derivadas, se hace la variación respecto de la métrica. Usando los resultados (3,31) y (3,41), se puede escribir

$$\frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta g_{ab}} = -(-g)^{1/2} G^{ab},$$

y en analogía con el caso para el Lagrangiano de Einstein

$$\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{ab}} = (-g)^{1/2} k T^{ab},$$

donde T^{ab} es el tensor de energía momento.

Finalmente, siendo que el argumento de la acción debe anularse y dividiendo por $-(-g)^{1/2}$, se obtiene

$$G^{ab} = k T^{ab}. \quad (3.43)$$

Esta es la **ecuación de campo con fuentes**

3.7. Límite Newtoniano

Teniendo las ecuaciones de campo de la teoría, es necesario compararlas con las correspondientes en el régimen Newtoniano y revisar su consistencia. Para ello, se realizan ciertas aproximaciones, expuestas en esta sección, donde se utilizan unidades no relativistas.

Se asume que existe un sistema de coordenadas privilegiado

$$(x^a) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^a) = (ct, x, y, z),$$

en el que la métrica difiere ligeramente de la métrica de Minkowski η^{ab}

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \varepsilon h_{ab} + O(\varepsilon^2). \quad (3.44)$$

También se asume que la velocidad de las partículas en el sistema es pequeña comparada con c

$$\frac{v}{c} = \varepsilon, \quad (3.45)$$

donde $\varepsilon \ll 1$.

Considerando que en un intervalo de tiempo δt , un cuerpo se mueve una distancia δx^a , con velocidad v , se cumple

$$\delta x^a \sim v \delta t \sim \frac{v}{c} c \delta t \sim \varepsilon \delta x^0.$$

Entonces

$$\frac{\varepsilon}{\delta x^\alpha} \sim \frac{1}{\delta x^0}.$$

Usando la relación anterior, para una función de las coordenadas, f se escribe

$$\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \sim \frac{\partial f}{\partial x^0}. \quad (3.46)$$

Es decir que las derivadas respecto a la coordenada temporal son de orden ε , multiplicado por las derivadas respecto a las coordenadas espaciales.

Para una partícula de prueba, libre, con velocidad v y en una línea de mundo $x^a = x^a(\tau)$, se cumple la **ecuación de geodésicas**

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} = 0. \quad (3.47)$$

Luego, por definición, se tiene

$$c^2 d\tau^2 = ds^2,$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c^2 d\tau^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= dt^2 (c^2 - v^2) \\ &= c^2 dt^2 (1 - \varepsilon^2), \end{aligned}$$

utilizando (3,45). Entonces

$$\frac{dt^2}{d\tau^2} \approx 1 + \varepsilon^2 + \dots$$

Permaneciendo al orden más bajo en ε y tomando la raíz cuadrada,

$$\frac{dt}{d\tau} = 1. \quad (3.48)$$

Por lo tanto, puede realizarse el cambio $\tau \rightarrow t$ en (3,47). Luego, utilizando (3,46)

$$\frac{dx^a}{cdt} = O(\varepsilon), \quad (3.49)$$

y para la conexión métrica (3,4)

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}(\eta^{ab} + \varepsilon h^{ad}) [\partial_c \eta_{bd} + \varepsilon \partial_c h_{bd} + \partial_b \eta_{cd} + \varepsilon \partial_b h_{cd} - \partial_d \eta_{bc} - \varepsilon \partial_d h_{bc}].$$

Los términos de la forma $\partial_c \eta_{bd}$ se anulan dado que η es plana,

$$\Rightarrow \Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} \eta^{ad} \varepsilon (\partial_c h_{bd} + \partial_b h_{cd} - \partial_d h_{bc}) + O(\varepsilon^2). \quad (3.50)$$

Entonces

$$\Gamma_{bc}^a = O(\varepsilon). \quad (3.51)$$

Ahora, considerando la parte espacial de (3,47), donde $a = \alpha$

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \frac{1}{c^2} \Gamma_{bc}^\alpha \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^c}{dt} + O(\varepsilon) = 0,$$

y expandiendo las componentes del segundo término

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^{\alpha} \frac{dx^0}{cdt} \frac{dx^0}{cdt} &= \Gamma_{00}^{\alpha}, \\ \Gamma_{0\beta}^{\alpha} \frac{dx^0}{cdt} \frac{dx^{\beta}}{cdt} &= \Gamma_{0\beta}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{cdt} = \Gamma_{\beta 0}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{cdt}, \\ \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{cdt} \frac{dx^{\gamma}}{cdt} &.\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^{\alpha}}{dt^2} + \Gamma_{00}^{\alpha} + 2\Gamma_{0\beta}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{cdt} + \Gamma_{\beta 0}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{cdt} + O(\varepsilon) = 0. \quad (3.52)$$

Nótese de (3,49) y (3,51) que el tercer y cuarto término son $O(\varepsilon^2)$ y $O(\varepsilon^3)$, respectivamente, por lo que pueden omitirse. Luego, por definición

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^{\alpha} &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha d} \varepsilon (\partial_0 h_{d0} + \partial_0 h_{0d} - \partial_d h_{00}) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha d} \varepsilon \left(2 \frac{\partial h_{0d}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^d} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon \left(2 \frac{\partial h_{0\alpha}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\alpha}} \right),\end{aligned}$$

dado que $\eta^{\alpha\beta} = -1$ es el único término distinto de cero. Utilizando la aproximación (3,46), la relación anterior queda

$$\Gamma_{00}^{\alpha} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\alpha}}.$$

Entonces, puede escribirse la ecuación (3,52) como

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\alpha}} + O(\varepsilon), \quad (3.53)$$

al utilizar la definición (3,44).

Finalmente, se compara la ecuación anterior con la ecuación para la fuerza en el régimen Newtoniano

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^{\alpha}},$$

donde Φ es el potencial gravitacional.

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\alpha}} = \frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\alpha}} + O(\varepsilon).$$

Agregando en el primer término las condiciones de frontera para distancias lejanas $\Phi \rightarrow 0$ y $g_{00} \rightarrow 1$, se obtiene

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2} + O(v/c), \quad (3.54)$$

denominado **límite de campo débil**.

3.8. Constante de acoplamiento

En orden de determinar la constante en la ecuación (3,43), se busca reescribir dicha ecuación en una forma más conveniente, llamada **forma linearizada**. Para ello, se considera la métrica (3,44) con la condición de frontera de espacio-tiempo asintóticamente plano

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_{ab} = 0,$$

y se utiliza la métrica contravariante

$$g^{ab} = \eta^{ab} - \varepsilon h^{ab}.$$

Teniendo (3,50), se reescriben los tensores que involucran derivadas de la métrica, permaneciendo a orden ε : Para (3,9) puede observarse que los productos de la conexión métrica serán de orden ε^2 , recordando (3,51). Por lo tanto el tensor de Riemann está dado por

$$\begin{aligned} R_{bcd}^a &= \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon [\partial_c (h_{d,b}^a + h_{b,d}^a - h_{bd,}^a) - \partial_d (h_{c,b}^a + h_{b,c}^a - h_{bc,}^a)] + O(\varepsilon^2) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon (h_{d,bc}^a - h_{bd,c}^a - h_{c,bd}^a + h_{bc,d}^a), \\ &\Rightarrow R_{abcd} = \frac{1}{2} \varepsilon (h_{ad,bc} + h_{bc,ad} - h_{bd,ac} - h_{ac,bd}). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Donde la notación de comas, en los términos del tipo $h_{bd,ac}$ indica derivadas parciales. Es decir, $h_{bd,ac} = \partial_a \partial_c h_{bd}$. El tensor de Ricci

$$R_{ab} = R_{acb}^c = \frac{1}{2} \varepsilon (h_{a,cb}^c + h_{b,ac}^c - \square h_{ab} - h_{,ab}),$$

donde

$$\begin{aligned} h &= h_d^d = \eta^{cd} h_{cd}, \\ \square &= \partial^d \partial_d = \eta^{cd} \partial_c \partial_d = dt^2 - \nabla^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$R_{ab} = \frac{1}{2} \varepsilon (h_{a,bc}^c + h_{b,ac}^c - \square h_{ab} - h_{,ab}). \quad (3.56)$$

De manera análoga, el escalar de Ricci

$$R = \eta^{ab} R_{ab} = \varepsilon (h^{cb}{}_{,cb} - \square h). \quad (3.57)$$

Finalmente, el tensor de Einstein

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} R = \frac{1}{2} \varepsilon (h_{a,bc}^c + h_{b,ac}^c - \square h_{ab} - h_{,ab} - \eta_{ab} h^{cb}{}_{,cb} + \eta_{ab} \square h). \quad (3.58)$$

Los tensores anteriores tienen la característica de ser **invariantes de norma** (véase desarrollo de Isometrías).

Ahora, se define

$$\psi_{ab} \equiv h_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} h, \quad (3.59)$$

y se reescriben los tensores obtenidos anteriormente en términos de ψ , utilizando su definición. Entonces

$$R_{ab} = \frac{1}{2}\varepsilon(\psi_{a,bc}^c + \psi_{b,ac}^c - \square h_{ab}),$$

$$R = \frac{1}{2}\varepsilon(2\psi^{cd}_{,cd} - \square h),$$

$$G_{ab} = \frac{1}{2}\varepsilon(\psi_{a,bc}^c + \psi_{b,ac}^c - \square \psi_{ab} - \eta_{ab}\psi^{cd}_{,cd}).$$

La forma linearizada del tensor de Einstein sugiere que las ecuaciones de campo se reducen a ecuaciones de onda si se impone la condición

$$\psi_{b,a}^a = 0, \quad (3.60)$$

o en términos de h

$$h_{b,a}^a - \frac{1}{2}h_{,b} = 0.$$

La condición anterior es denominada **norma de Fock** (o norma de Einstein, de Dondor o Hilbert).

Ahora, utilizando la transformación

$$h'_{ab} = h_{ab} - 2\tilde{\xi}_{a,b},$$

se tiene (de la sección de isometrías)

$$h' = h - 2\tilde{\xi}^a_{,a}.$$

Por lo tanto, la transformación para ψ es

$$\psi'_{ab} = h_{ab} - 2\tilde{\xi}_{a,b} - \frac{1}{2}\eta_{ab}(h - 2\tilde{\xi}^c_{,c}) \quad (3.61)$$

$$= \psi_{ab} - \tilde{\xi}_{a,b} - \tilde{\xi}_{b,a} + \eta_{ab}\tilde{\xi}^c_{,c}. \quad (3.62)$$

Entonces

$$\psi'^a_{b,a} = \psi^a_{b,a} - \square \tilde{\xi}_b.$$

La transformación anterior es invariante si cumple

$$\psi'^a_{b,a} = 0,$$

lo cual requiere

$$\psi^a_{b,a} = \square \tilde{\xi}_b.$$

Finalmente, aplicando la condición (3,60) a G_{ab} , se tiene

$$G_{ab} = -\frac{1}{2}\varepsilon \square \psi_{ab},$$

y las ecuaciones de campo se escriben como

$$\frac{1}{2}\varepsilon \square \psi_{ab} = -kT_{ab}. \quad (3.63)$$

Son las ecuaciones de campo en su forma linearizada. Luego, de la definición de ψ

$$\frac{1}{2}\varepsilon\Box(h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\eta^{cd}h_{cd}) = -kT_{ab},$$

donde, escribiendo de forma explícita el D'alembertiano

$$\frac{1}{2}\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial x^0}(h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h) - \nabla^2(h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h)\right] = -kT_{ab}.$$

Luego, usando la aproximación (3,46) y permaneciendo a orden ε

$$-\frac{1}{2}\varepsilon\nabla^2 h_{ab} + \frac{\varepsilon}{4}\eta_{ab}\nabla^2 h = -kT_{ab}. \quad (3.64)$$

Por otro lado, contrayendo las ecuaciones de campo (3,43) con η^{ab} , se tiene

$$G = kT,$$

donde

$$G = \eta^{ab}(R_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}R) = -R,$$

por lo que

$$R = -kT.$$

De la forma linearizada de R

$$R = -\frac{1}{2}\varepsilon\Box h = \frac{1}{2}\varepsilon\nabla^2 h,$$

usando la condición (3,60) y la aproximación (3,46). Entonces

$$\frac{1}{2}\varepsilon\nabla^2 h = -kT.$$

Utilizando la relación anterior en (3,64)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\varepsilon\nabla^2 h_{ab} + \frac{1}{2}\eta_{ab}(-kT) &= -kT_{ab}, \\ -\frac{1}{2}\varepsilon\nabla^2 h_{ab} &= -kT_{ab} + \frac{k}{2}\eta_{ab}T, \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon\nabla^2 h_{ab} &= k(T_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\eta^{cd}T_{cd}). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Ahora, partiendo de la ecuación anterior, se considera como fuente de campo una distribución de materia no interactuante y desacoplada (*polvo*) de densidad ρ_0 y a velocidad baja v

$$T^{ab} = \rho_0 u^a u^b,$$

donde la 4-velocidad $u^a = \frac{dx^a}{d\tau}$. Eliminando términos de orden $\frac{v}{c}$ y $\rho \frac{v}{c}$, se tiene

$$T^{ab} = c^2 \rho_0 \delta_0^a \delta_0^b,$$

$$T_{ab} = c^2 \rho_0 \delta_a^0 \delta_b^0,$$

$$\eta^{cd} T_{cd} = T_c^c = c^2 \rho_0.$$

Finalmente, observando la componente 00 de (3,65) y utilizando lo anterior,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varepsilon \nabla^2 h_{ab} &= k(c^2 \rho_0 - \frac{1}{2} c^2 \rho_0), \\ \Rightarrow \varepsilon \nabla^2 h_{ab} &= k c^2 \rho_0. \end{aligned}$$

De la ec. (3,44)

$$g_{00} = 1 + \varepsilon h_{00}, \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 g_{00} = \varepsilon \nabla^2 h_{00}.$$

Luego, usando el límite de campo débil (3,54)

$$\begin{aligned} \varepsilon \nabla^2 h_{00} &= \nabla^2 \left(\frac{2\Phi}{c^2} \right) = k c^2 \rho_0, \\ \Rightarrow \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{2} k c^2 \rho_0. \end{aligned}$$

Al comparar la anterior con la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_0,$$

se tiene que la constante de acoplamiento debe ser

$$k = \frac{8\pi G}{c^4}.$$

Por lo tanto, las ecuaciones de campo son

$$G^{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{ab}. \quad (3.66)$$

3.9. Solución de Schwarzschild

Teniendo las ecuaciones de campo completas, se presenta una solución a las ecuaciones de vacío con campos de simetría esférica. Para obtener dicha solución es necesario primero abordar el tema de soluciones estacionarias y soluciones con simetría esférica.

Se define una **solución estacionaria** como aquella en la que las magnitudes no dependen explícitamente del tiempo. Esto incluye a los sistemas que no evolucionan en el tiempo (soluciones estáticas).

Una métrica es estacionaria si existe un sistema de coordenadas en el que

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^0} = 0.$$

Para que esta condición sea invariante, se define el campo tipo tiempo

$$X_a = \delta_{0a}, \quad (3.67)$$

para el cual, la derivada de Lie es

$$\begin{aligned} L_X g_{ab} &= X^c g_{ab,c} + g_{ac} X^c_{,b} + g_{ab} X^c_{,a} \\ &= \delta_0^c g_{ab,c} + g_{ac} \delta_0^c_{,b} + g_{ab} \delta_0^c_{,a}. \end{aligned}$$

Luego, usando (3,12)

$$L_X g_{ab} = g_{ab,0} = 0, \quad (3.68)$$

dada la definición de métrica estacionaria. Entonces $L_X g_{ab}$ se anula en cualquier sistema de coordenadas, por lo que X_a es un vector de Killing y puede realizarse la siguiente afirmación:

Se dice que un espacio-tiempo es estacionario si y solo si éste admite un campo vectorial de Killing tipo tiempo.

Ahora, se busca obtener la definición para un campo vectorial ortogonal a una hipersuperficie, para ello, se considera la familia de hipersuperficies

$$f(x^a) = \mu, \quad (3.69)$$

donde a cada superficie le corresponde un valor de μ . Se consideran dos puntos P y Q sobre la superficie S, con coordenadas

$$P = (x^a), \quad Q = (x^a + dx^a).$$

Usando las coordenadas de Q y el teorema de Taylor a primer orden

$$f(x^a + dx^a) = f(x^a) + \frac{\partial f}{\partial x^a} dx^a. \quad (3.70)$$

Luego, restando (3,69) de (3,70), se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x^a} dx^a = 0, \quad (3.71)$$

para el punto P. Ahora, definiendo

$$n_a \equiv \frac{\partial f}{\partial x^a}, \quad (3.72)$$

la ecuación 3,71 se convierte en

$$n_a dx^a = g_{ab} n^a dx^b = 0, \quad (3.73)$$

donde n es ortogonal al campo vectorial infinitesimal dx^a y es llamado *campo vectorial normal a S en P*.

Ahora, un campo cualquiera X^a es ortogonal a la hipersuperficie si es proporcional a n , es decir

$$X^a = \lambda(x)n^a = \lambda f_{,a}, \quad (3.74)$$

dada la definición (3.72). Entonces, desarrollando el término $X_a \partial_b X_c$, se obtiene

$$\begin{aligned} X_a \partial_b X_c &= (\lambda \partial_a f) \partial_b (\lambda \partial_c f) \\ &= \lambda \partial_a f (\partial_b \lambda \partial_c f + \lambda \partial_b \partial_c f) \\ &= \lambda \partial_a f \partial_b \lambda \partial_c f + \lambda^2 \partial_a f \partial_b \partial_c f. \end{aligned}$$

Dado que se pueden intercambiar los índices del producto anterior sin alterar el signo, la parte totalmente simétrica se anula

$$X_{[a} \partial_b X_{c]} = 0.$$

Esta relación sigue siendo válida si se realiza el cambio $\partial_c \rightarrow \nabla_c$, por lo que puede escribirse

$$X_{[a} \nabla_b X_{c]} = 0. \quad (3.75)$$

Esta es la condición que cumple todo campo ortogonal. Teniendo que X_a es un vector de Killing, satisface (3.23), entonces

$$\nabla_a X_b = -\nabla_b X_a. \quad (3.76)$$

Dada esta relación, los términos de (3.75) se reducen a

$$X_a \nabla_b X_c + X_c \nabla_a X_b + X_b \nabla_c X_a = 0.$$

Luego, al contraer con X^c y usar (3.76)

$$X_a X^c \nabla_b X_c + X^2 \nabla_a X_b - X_b X^c \nabla_a X_c = 0,$$

Intercambiando la posición del índice contraído c

$$X_a X_c \nabla_b X^c + X^2 \nabla_a X_b - X_b X_c \nabla_a X^c = 0.$$

Finalmente, sumando las dos ecuaciones anteriores y usando (3.76) nuevamente

$$\begin{aligned} X_a (X^c \nabla_b X_c + X_c \nabla_b X^c) - X^2 \nabla_b X_a + X^2 \nabla_a X_b - X_b (X^c \nabla_a X_c + X_c \nabla_a X^c) &= 0, \\ X_a \nabla_b X^2 - X_b \nabla_a X^2 + X^2 (\nabla_a X_b - \nabla_b X_a) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces se realiza el cambio $\nabla_a \rightarrow \partial_a$ de nuevo

$$\begin{aligned} X_a \partial_b X^2 - X_b \partial_a X^2 + X^2 (\partial_a X_b - \partial_b X_a) &= 0, \\ \Leftrightarrow X^2 \partial_a X_b - X_b \partial_a X^2 &= X^2 \partial_b X_a - X_a \partial_b X^2. \end{aligned}$$

Relación que, expresada como la derivada de un cociente (dividiendo ambos lados de la ecuación por X^4) se reescribe

$$\partial_a \left(\frac{X_b}{X^2} \right) = \partial_b \left(\frac{X_a}{X^2} \right), \quad (3.77)$$

donde $X^a, X^2 \neq 0$. Esta ecuación indica que el cociente entre paréntesis debe ser el gradiente de un campo escalar, entonces

$$\begin{aligned} \frac{X_a}{X^2} &= \partial_a f, \\ \Leftrightarrow X^a &= X^2 \partial_a f. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Nótese que la ecuación obtenida es (3,74), donde $\lambda = X^2$.

3.9.1. Soluciones estáticas

De forma general, una solución estacionaria puede tener términos cruzados de la forma $dx^0 dx^a$, para un intervalo entre (x^0, x^1, x^2, x^3) y $(x^0 + dx^0, x^1 + dx^1, x^2, x^3)$, donde el elemento de línea tiene la forma

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{01}dx^0 dx^1 + g_{11}(dx^1)^2.$$

En la ecuación anterior solo se observan las primeras tres coordenadas. Aplicando la transformación inversión temporal $x^0 \rightarrow x'^0 = -x^0$,

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - 2g_{01}dx^0 dx^1 + g_{11}(dx^1)^2.$$

Sabiendo que una solución estática debe ser invariante bajo inversión temporal, el término cruzado no debe aparecer. Se tiene entonces que para una métrica estática no existen términos cruzados de la forma $dx^0 dx^1$.

Ahora, veamos qué sucede con la condición (3,78) para un espacio-tiempo con un campo vectorial de Killing tipo tiempo (3,67)

$$\begin{aligned} X_a &= g_{ab}X^b = g_{ab}\delta_0^b = g_{0a}, \\ X^2 &= X_a X^a = g_{0a}\delta_a^0 = g_{00}. \end{aligned}$$

Entonces, (3,78) se vuelve

$$g_{0a} = g_{00}f_{,a}. \quad (3.79)$$

En esta ecuación, para el caso $a = 0$ se cumple $f_{,0} = 1$. Al integrar esta última relación se obtiene

$$f = x^0 + h(x^\alpha),$$

donde h es una función arbitraria de las coordenadas espaciales.

Ahora, considerando la transformación de coordenadas

$$x^0 \rightarrow x'^0 = x^0 + h(x^\alpha), \quad \text{con } x'^\alpha = x^\alpha, \quad (3.80)$$

cambian las siguientes cantidades:

- Los campos tipo tiempo

$$X'^a = \delta_0^a, \quad \text{dado que } \delta \text{ es invariante.} \quad (3.81)$$

- La derivada de Lie

$$\begin{aligned} L_X g'_{ab} &= X^c g'_{ab;c} + g'_{ac} X^c_{,b} + g'_{bc} X^c_{,a}, \\ \Rightarrow L_X g'_{ab} &= 0. \end{aligned} \quad (3.82)$$

El resultado anterior proviene de un procedimiento análogo al utilizado para establecer la ecuación (3,68).

- El primer término de la métrica

$$g_{00} = \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} g'_{00} = \left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^0} + \frac{\partial h(\alpha)}{\partial x^0} \right) g'_{00},$$

$$\Rightarrow g'_{00} = g_{00}. \quad (3.83)$$

- Finalmente, para transformar los términos cruzados de la coordenada temporal con las espaciales, se considera

$$ds^2 = g'_{00}(dx'^0)^2 + 2g'_{0\alpha}dx'^0dx'^\alpha + g'_{\alpha\beta}dx'^\alpha dx'^\beta.$$

Luego, de la transformación (3,80), se cumple $dx'^0 = dx^0 + \frac{\partial h(\alpha)}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$. Se utiliza entonces inversión temporal y el argumento de que ésta debe preservarse, para obtener

$$ds^2 = g_{00}(dx'^0)^2 - 2g'_{0\alpha}dx'^0dx'^\alpha + g'_{\alpha\beta}dx'^\alpha dx'^\beta,$$

$$\Rightarrow g'_{0\alpha} = 0. \quad (3.84)$$

De las transformaciones anteriores, (3,84) indica que la métrica no posee términos cruzados de la forma $dx^0 dx^\alpha$, por lo que se trata de una **solución estática**, que puede definirse de la siguiente forma:

Se dice que un espacio-tiempo es estático si y solo si admite campos de Killing tipo tiempo, ortogonales a la superficie.

En un espacio-tiempo estático existe un sistema coordenado en el que la métrica es independiente del tiempo y no hay términos cruzados con el elemento de la línea temporal ($g_{0\alpha} = 0$) sin embargo, aún se tiene la libertad de transformar como

$$x^0 \rightarrow x'^0 = Ax^0 + B, \quad x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = h'^\alpha(x^\beta),$$

donde A y B son constantes.

Aplicando la transformación de x^0 junto con la condición asintóticamente plana $g_{00} \rightarrow 1$, la parte temporal cambia de la siguiente forma:

$$ds^2 = g_{00}(dx'^0)^2 = g_{00}(Adx^0)^2 = g_{00}(dx^0)^2,$$

$$(Adx^0)^2 = (dx^0)^2, \quad \rightarrow \quad A = \pm 1.$$

Lo anterior se cumple si se exige que el elemento de línea sea invariante ante dicha transformación. Restringiendo que la solución no contemple inversión temporal, entonces $A = 1$ y la transformación se vuelve $x'^0 = x^0 + B$, llamada coordenada **tiempo de mundo**. Ésta se define como la coordenada temporal más una constante. Significa que, para métricas estáticas, la variedad puede dividirse en partes de tiempo constante o absoluto y sobre estas partes existen observadores privilegiados que coinciden en eventos simultáneos.

3.9.2. Soluciones con simetría esférica

Simetría esférica: Se dice que un espacio-tiempo es esféricamente simétrico si y solo si admite tres campos de Killing X^a linealmente independientes, cuyas órbitas son cerradas y que satisfacen

$$\begin{aligned}[X^1, X^2] &= X^3, \\ [X^2, X^3] &= X^1, \\ [X^3, X^1] &= X^2.\end{aligned}$$

En un espacio esféricamente simétrico existe un sistema de coordenadas en el que los campos de Killing son de la forma

$$\begin{aligned}X^0 &= 0, \\ X^\alpha &= \omega^\alpha_\beta X^\beta,\end{aligned}$$

donde $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$. Esta transformación depende de 3 parámetros que implican 3 rotaciones espaciales.

Sí se fija el tiempo y se considera un punto P a una distancia a del origen, las rotaciones respecto del origen describirán a P sobre una 2-esfera. Para cubrir todos los puntos de la esfera, los intervalos angulares son

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\pi \leq \phi \leq \pi.$$

Tomando el elemento de línea para las coordenadas x, y, z y escribiéndolo en coordenadas esféricas, con la consideración $r = a = cte$

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Nótese la ausencia de términos de la forma $d\theta d\phi$, pues la métrica debe ser invariante ante las transformaciones

$$\theta \rightarrow \theta' = \pi - \theta, \quad \phi \rightarrow \phi' = -\phi.$$

Ahora, se trabaja sobre un sistema especial de coordenadas

$$(x^a) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi),$$

para el cual el elemento de línea tiene la forma

$$ds^2 = A dt^2 - 2B dt dr - C dr^2 - D(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

siendo A, B, C y D funciones de r y t .

Si se introduce la transformación a la coordenada radial $r \rightarrow r' = D^{\frac{1}{2}}$, entonces $r'^2 = D$, por lo que

$$ds^2 = A'(t, r') dt^2 - 2B'(t, r') dt dr' - C'(t, r') dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.85)$$

Por otro lado, se sabe que los diferenciales de la forma $A'(t, r') dt - B'(t, r') dr'$ pueden multiplicarse por un factor de integración $I(t, r)$ que forma una diferencial exacta.

Utilizando esta idea, se define

$$\begin{aligned} dt' &= I(r', t) [A'(t, r')dt - B'(t, r')dr'] , \\ dt'^2 &= I^2 [A'^2 dt^2 + B'^2 dr'^2 - 2A'B' dt dr'] . \end{aligned}$$

Desarrollando dt'^2

$$A' dt^2 - 2B' dt dr' = I^{-2} A'^{-1} dt'^2 - A'^{-1} B'^2 dr'^2. \quad (3.86)$$

Sustituyendo el lado derecho de la igualdad anterior en (3.85), se tiene

$$\begin{aligned} ds^2 &= I^{-2} A'^{-1} dt'^2 - A'^{-1} B'^2 dr'^2 - C' dr'^2 - r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= I^{-2} A'^{-1} dt'^2 - (A'^{-1} B'^2 + C') dr'^2 - r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned}$$

Luego, se definen las funciones de ν y λ como

$$e^\nu = A'^{-1} I^{-2}, \quad e^\lambda = C' + A'^{-1} B'^2,$$

ya que, al ser funciones exponenciales, se garantiza que sean términos positivos.

Usando las definiciones anteriores, puede escribirse (3.85) de la siguiente manera

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.87)$$

donde ν y λ son funciones de t y r .

Para este elemento de línea, la métrica en su forma covariante y contravariante es

$$g_{ab} = \text{diag}(e^\nu, -e^\lambda, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta), \quad (3.88)$$

$$g^{ab} = \text{diag}(e^{-\nu}, -e^{-\lambda}, -r^{-2}, -r^{-2} \sin^{-2} \theta). \quad (3.89)$$

Denotando las derivadas con respecto a t y r con un punto y una prima, respectivamente, se tiene que las componentes del tensor de Einstein para la métrica anterior son

$$G_0^0 = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right), \quad (3.90)$$

$$G_0^1 = -e^{-\lambda} r^{-1} \dot{\lambda} = -e^{\lambda-\nu} G_1^0, \quad (3.91)$$

$$G_1^1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right), \quad (3.92)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = \frac{e^{-\lambda}}{2} \left(\frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'^2}{2} - \nu'' \right) + \frac{e^{-\nu}}{2} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} \right). \quad (3.93)$$

Para el caso en que (3.90), (3.91) y (3.92) se anulan, se tiene

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right) = 0, \quad (3.94)$$

$$\dot{\lambda} = 0, \quad (3.95)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) = 0. \quad (3.96)$$

respectivamente. Entonces (3,93) se reescribe como

$$G_3^3 = \frac{e^{-\lambda}}{2} \left(\frac{v'\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{v'}{r} - \frac{v'^2}{2} - v'' \right). \quad (3.97)$$

Igualando (3,94) y (3,96), se tiene

$$\begin{aligned} -e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) &= e^{-\lambda} \left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2} \right), \\ \rightarrow \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} &= \frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lambda' + v' = 0. \quad (3.98)$$

Entonces, puede reescribirse (3,97) como

$$G_3^3 = \frac{e^{-\lambda}}{2} \left(-v'^2 + \frac{2v'}{r} - v'' \right),$$

por lo que (3,94), (3,95) y (3,96) son las ecuaciones independientes a resolver. Ahora, integrando la relación (3,98), se obtiene

$$\lambda + v = h(t).$$

De (3,96) puede verse que λ debe ser función únicamente de r . Por lo anterior, (3,94) es una ecuación diferencial ordinaria

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) = -\frac{1}{r^2}, \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda} - re^{-\lambda}\lambda' = 1,$$

que puede reescribirse como

$$(re^{-\lambda})' = 1.$$

Volviendo a integrar la ecuación anterior

$$re^{-\lambda} = r + c \quad \text{con } c = \text{cte.}$$

Si se elige la constante de integración $c = -2m$

$$re^{-\lambda} = r - 2m \Rightarrow e^{\lambda} = \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1}. \quad (3.99)$$

Hasta ahora, se puede escribir (3,88) como

$$\begin{aligned} g_{ab} &= \text{diag} \left[e^{-\lambda+h(t)}, -\left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta \right] \\ &= \text{diag} \left[e^{h(t)} \left(1 - \frac{2m}{r} \right), -\left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta \right]. \end{aligned}$$

Para eliminar la función $h(t)$ se aplica la transformación $t \rightarrow t'$, donde

$$t' = \int_c^t e^{\frac{1}{2}h(u)} du, \quad c = \text{cte.}$$

Entonces, tomando el primer término de la métrica $e^{h(t)} (1 - \frac{2m}{r})$ y utilizando la regla de transformación para dicho término

$$g_{00} = \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} g'_{00}, \quad \Leftrightarrow \quad g'_{00} = \left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^0} \right)^{-2} g_{00}.$$

Luego, utilizando el teorema fundamental del cálculo

$$\left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^0} \right)^{-2} = \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^{-2} = (e^{\frac{1}{2}h(t)})^{-2} = e^{-h(t)}.$$

Por lo tanto, puede reescribirse el primer término de la métrica solamente como $(1 - \frac{2m}{r})$. Dado lo anterior, el elemento de línea para la **métrica de Schwarzschild** es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.100)$$

Por último, para establecer el valor de la constante m de la métrica, se considera un potencial central en mecánica clásica, producido por una masa M

$$\Phi = -\frac{GM}{r},$$

y se considera el límite clásico (3,54). Entonces, se tiene

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}.$$

Por lo tanto, comparando con el término g_{00} , la constante m cumple

$$m = \frac{GM}{c^2}.$$

Denominada **masa geométrica**.

Hasta ahora se han construido las ecuaciones de campo de la teoría, se obtuvo su límite clásico, demostrando su consistencia con la teoría Newtoniana y se resolvieron las ecuaciones de campo para el sistema más sencillo no trivial.

Capítulo 4

Órbitas planetarias en Relatividad General

Habiendo desarrollado las ecuaciones de campo de la teoría y su solución para un campo gravitatorio esféricamente simétrico, en este capítulo se presenta el desarrollo del problema de dos cuerpos usando Relatividad General y la solución de Schwarzschild. Se obtiene la precesión para las órbitas y se calcula el valor de la precesión para el perihelio de la órbita de Mercurio, siguiendo la notación y secuencia de d'Inverno, 1998.

En orden de resolver el problema para un campo gravitacional esféricamente simétrico, se utiliza la solución de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.1)$$

donde m es la masa geométrica y M es la masa de la fuente de campo. Para este problema se toma la solución para las geodésicas del espacio, pues se buscan las ecuaciones de movimiento para partículas de prueba. En este caso, se iguala el elemento de línea a la constante $\alpha = 2K$, donde K puede tomar los valores

$$2K = \begin{cases} 0, \\ +1, \\ -1, \end{cases}$$

dependiendo si las geodésicas son nulas, tipo tiempo o tipo espacio, respectivamente.

En este caso las partículas de prueba tienen masa, por lo que la descripción de su trayectoria está dada por geodésicas tipo tiempo. Entonces

$$2K = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2 = 1. \quad (4.2)$$

En esta ecuación, las derivadas son respecto del tiempo propio τ . Las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.4) para la ecuación (4.2) son

$$\frac{\partial K}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 0.$$

■ $\alpha = 0$:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0. \quad (4.3)$$

■ $\alpha = 1$:

$$\frac{m}{r^2} \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} \frac{m}{r^2} \dot{r}^2 - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + \frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r} \right] = 0. \quad (4.4)$$

■ $\alpha = 2$:

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0. \quad (4.5)$$

■ $\alpha = 3$:

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0. \quad (4.6)$$

Para que la solución a este problema describa el movimiento en un plano, como se sabe que sucede para este sistema descrito con Mecánica Clásica y como puede verse en la ecuación (2,13), fijando el valor $\theta = \frac{\pi}{2}$, las derivadas a las ecuaciones de movimiento con respecto de θ deben anularse. Entonces

$$\dot{\theta} = 0.$$

En la ecuación (4,5)

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) = 0,$$

entonces

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0,$$

por lo que

$$\ddot{\theta} = 0.$$

Para garantizar que, dado lo anterior, el movimiento se lleva a cabo en un plano, las derivadas de orden superior también deben anularse. Luego, de la ecuación (4,6)

$$r^2 \dot{\phi} = h, \quad (4.7)$$

donde h es la constante asociada con la magnitud del momento angular por unidad de masa.

Dada la ec. (4,3), es posible reescribir (4,2) como

$$k^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 = 1, \quad (4.8)$$

donde $\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \equiv k$. Luego, definiendo $u \equiv \frac{1}{r}$, se realizan los siguientes cambios a las ecuaciones de movimiento:

La ecuación (4,8) se escribe como

$$\dot{r} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{u} \right) = \frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau}, \quad (4.9)$$

recordando que las ecuaciones de movimiento son funciones $r(\phi)$ y $\phi(\tau)$, mientras que la ec. (4.7) se convierte en

$$\frac{d\phi}{d\tau} = hu^2.$$

Introduciendo este término en la expresión para $\dot{r}$, (4,9)

$$\dot{r} = -h \frac{du}{d\phi}.$$

Entonces, usando (4,7), se reescribe (4,8) como

$$\begin{aligned} k^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - h^2 u^2 &= 1, \\ k^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} h^2 \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - h^2 u^2 &= 1, \\ \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - \frac{k^2}{h^2} + u^2 - 2mu^3 &= -\frac{1}{h^2} + \frac{2mu}{h^2}, \\ \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 &= \frac{k^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2}u + 2mu^3. \end{aligned} \quad (4.10)$$

La ecuación obtenida describe la trayectoria de una partícula de prueba en una línea de tiempo constante.

Finalmente, derivando la ecuación anterior con respecto de ϕ , se obtiene

$$\frac{d^2u}{d\phi} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2. \quad (4.11)$$

La ecuación diferencial de segundo orden para este sistema es la **ecuación de Binet** para un sistema clásico, con el segundo término del lado derecho como corrección.

4.1. La ecuación de movimiento

Comparado los dos términos del lado derecho en la ecuación (4,11), puede notarse que el segundo término es mucho más pequeño que el primero, el cociente entre ambos es un término pequeño. Dicho cociente, utilizando como un ejemplo los datos para Mercurio, es del orden de 10^{-7} .

La observación anterior permite resolver la ecuación diferencial usando un método perturbativo. En particular, se toma como parámetro el término

$$\varepsilon = \frac{3m^2}{h^2}.$$

Ahora, se escribe (4,11) en términos de ε , denotando la derivada con respecto de ϕ como u'

$$u'' + u = \frac{m}{h^2} + \frac{\varepsilon h^2}{m} u^2. \quad (4.12)$$

Si se asume que la ecuación anterior tiene una solución de la forma

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

y se introduce dicha solución en (4,12)

$$u'' + \varepsilon u_1'' + u_0 + \varepsilon u_1 = \frac{\varepsilon h^2}{m} u_0^2 + \frac{m}{h^2},$$

es posible agrupar en potencias de ε . Si los términos de cada potencia se agrupan en ecuaciones distintas, se obtienen lo siguiente:

$$\begin{cases} u_0'' + u_0 = \frac{m}{h^2}, \\ u_1'' + u_1 = \frac{h^2}{m} u_0^2. \end{cases} \quad (4.13)$$

La ecuación para orden ε^0 tiene la forma de la ecuación de Binet para el sistema clásico, cuya solución es la ecuación para secciones cónicas (2,24)

$$u_0 = \frac{m}{h^2} (1 + e \cos \phi),$$

donde, para este caso, se ha establecido $e = \frac{h^2}{\mu}$ como la excentricidad de la curva y se usó la condición $\phi_0 = 0$.

Para la ecuación de orden ε , se introduce la solución de secciones cónicas en la segunda ecuación de (5,28)

$$u_1'' + u_1 = \frac{m}{h^2} (1 + 2e \cos \phi + e^2 \cos^2 \phi).$$

Luego, utilizando $\cos^2 \phi = \frac{1 + \cos 2\phi}{2}$, donde 2ϕ es el argumento del coseno.

$$\begin{aligned} u_1'' + u_1 &= \frac{m}{h^2} \left[1 + 2e \cos \phi + e^2 \left(\frac{1 + \cos 2\phi}{2} \right) \right], \\ u_1'' + u_1 &= \frac{m}{h^2} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) + \frac{2me}{h^2} \cos \phi + \frac{me^2}{2h^2} \cos 2\phi. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Se propone entonces la solución de la forma

$$u_1 = A + B\phi \sin \phi + C \cos 2\phi, \quad (4.15)$$

por lo que

$$u'' + u = A + 2B \cos \phi - 3C \cos 2\phi. \quad (4.16)$$

Comparando esta ecuación con (5,26) e igualando término a término, se obtiene

$$A + 2B \cos \phi - 3C \cos 2\phi = \frac{m}{h^2} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) + \frac{2me}{h^2} \cos \phi + \frac{me^2}{2h^2} \cos 2\phi.$$

Entonces, se identifica el valor de cada constante

$$A = \frac{m}{h^2} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right), \quad B = \frac{me}{h^2}, \quad C = -\frac{me^2}{6h^2}.$$

La ecuación para u_1 se encuentra sustituyendo los coeficientes A,B y C en la solución propuesta, con lo que las soluciones para (5,28) son

$$\begin{cases} u_0 = \frac{m}{h^2}(1 + e\cos\phi), \\ u_1 = \frac{m}{h^2}\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + \frac{me}{h^2}\phi\sin\phi - \frac{me^2}{6h^2}\cos 2\phi. \end{cases} \quad (4.17)$$

Para obtener la solución general, se incluye cada ecuación en una solución de la forma propuesta (4,15), obteniendo

$$u = \frac{m}{h^2} \left[1 + e\cos\phi + \frac{\epsilon m}{h^2} \left(1 + \frac{e^2}{2} + e\phi\sin\phi - \frac{e^2}{6}\cos 2\phi \right) \right].$$

Tal solución, como se mencionó anteriormente, es la solución a la ecuación de Binet corregida.

En la ecuación anterior, se considera que los términos constantes y el término periódico no representan un cambio en la posición de los ápsides de las órbitas, pues su contribución representa un desfase respecto del movimiento no corregido. Por lo anterior, se toma únicamente la corrección de la forma $\phi\sin\phi$, quedando

$$u = \frac{m}{h^2}(1 + e\cos\phi + \epsilon\phi\sin\phi). \quad (4.18)$$

Se reescribe de forma más conveniente utilizando la relación

$$\cos(\phi - \epsilon\phi) = \cos\phi\cos\epsilon\phi + \sin\phi\sin\epsilon\phi,$$

con la aproximación para ángulos pequeños

$$\cos\epsilon\phi \approx 1, \quad \sin\epsilon\phi \approx \epsilon\phi.$$

Finalmente, se obtiene

$$u = \frac{m}{h^2} \{1 + e\cos[\phi(1 - \epsilon)]\}. \quad (4.19)$$

Siendo ésta la ecuación de movimiento para el sistema en cuestión. Nótese la similitud con la ecuación de secciones cónicas (2,24), con una corrección en el ángulo.

4.2. Corrección al período orbital

De la ecuación anterior, se evalúa el argumento del coseno para un período completo 2π ,

$$\phi_c(1 - \epsilon) = 2\pi,$$

$$\phi_c \approx 2\pi(1 + \epsilon),$$

aproximando a primer orden en ϵ . El término extra en el periodo completo, que se identifica con la precesión, es

$$\Delta \simeq 2\pi\epsilon. \quad (4.20)$$

Ahora, se sustituyen los valores del parámetro ϵ y la masa geométrica, así como la relación

$$h^2 = Gma(1 - e^2),$$

donde a es la mayor distancia entre el origen y la órbita. Entonces la precesión se escribe como

$$\Delta \simeq \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}. \quad (4.21)$$

4.3. Precesión de la órbita de Mercurio

Utilizando los siguientes datos de Mercurio:

$$GM = 1,327 \times 10^{20} \frac{m^3}{s^2},$$

$$a = 5,7909 \times 10^{10} m,$$

$$e = 0,2056,$$

junto con la constante de velocidad de la luz, se calcula la precesión para esta órbita, introduciendo los datos anteriores en (4.21)

$$\Delta \simeq 5,018 \times 10^{-7} \frac{rad}{rev}.$$

En dicha cantidad se considera la precesión en radianes por cada período completo. En orden de expresar la precesión en unidades medibles en astronomía (segundos de arco por siglo) se considera el periodo de Mercurio

$$T = 0,2408 \text{ años.}$$

Luego, se calcula la cantidad de vueltas que completa este planeta en un siglo

$$N = 415,2824 \text{ rev.}$$

Considerando la equivalencia de las unidades angulares

$$1 \text{ rad} = 2,06 \times 10^5'',$$

junto con el periodo y el número de vueltas, se expresa la precesión en las nuevas unidades

$$\Delta \simeq 42,93''/\text{siglo}.$$

La observación reportada para la precesión del perihelio de Mercurio es

$$\Delta_{obs} \simeq 43,1 \pm 0,5''/\text{siglo}.$$

La obtención de un valor cercano a lo observado, para un fenómeno que no está descrito en la teoría Newtoniana, constituye una de las pruebas clásicas exitosas para la Relatividad General. En el apéndice A se incluye el desarrollo de la solución de Schwarzschild para un fenómeno tipo luz y se obtiene el ángulo de deflexión para rayos de luz en presencia de una fuente de campo gravitatorio.

Capítulo 5

Gravedad Entrópica

Como se vio en los capítulos anteriores, la Relatividad General es, al día de hoy, considerada como la teoría correcta para describir a la gravedad. Esta teoría se ha consolidado mediante los éxitos explicando fenómenos que no describe la gravedad Newtoniana y recuperando dicha teoría mediante un límite clásico. Además, predijo el fenómeno de ondas gravitacionales y la existencia de agujeros negros. Predicciones que han sido confirmadas mediante observaciones en años recientes por LIGO, Abbott y col., 2016 y EHT, 2019. A pesar de sus éxitos, existen observaciones que no concuerdan con Relatividad General y de ellas se derivan los problemas de materia y energía oscura, abiertos hasta el día de hoy. Por las razones anteriores, se han explorado diversas teorías alternativas, entre las que se encuentra la formulación entrópica.

Desde hace varios años se ha explorado la conexión entre la gravedad y la termodinámica. Esta conexión se introdujo con los trabajos de Unruh, 1976, Bekenstein, 1972 y Hawking, 1974. En este sentido, Jacobson, 1995, demostró que la ecuación de campo de Einstein puede ser entendida como una ecuación de estado.

Siguiendo con la concepción termodinámica de la gravedad, Verlinde, 2011 propuso que la ecuación de Newton puede entenderse como una fuerza entrópica o emergente, en analogía con el origen entrópico que se le atribuye a las fuerzas termodinámicas emergentes en sistemas de polímeros. Esta propuesta ofrece correcciones a la gravedad en el límite Newtoniano.

5.1. Fuerza Newtoniana corregida

Para derivar la ecuación de Newton corregida en el modelo entrópico, siguiendo a Modesto y Randono, 2010, considérese una fuente de campo gravitacional M en el origen, una partícula de prueba m y una superficie Ω entre ambas partículas, centrada en M . La partícula m se encuentra muy cerca de Ω , en comparación con su longitud de onda de Compton reducida

$$\lambda_m = \frac{\hbar}{mc^2}.$$

Para este sistema, se considera a Ω como una superficie cerrada, cuyas características macroscópicas, vistas por un observador externo, dependen del área A_0 y el volumen V_0 delimitado por ésta. Siendo que el volumen y el área pueden entenderse como operadores cuánticos, como fue descrito por Rovelli y Smolin, 1995a, los grados de libertad microscópicos del sistema están descritos por las configuraciones de *red de espín* consistentes con las cantidades macroscópicas, Rovelli y Smolin,

1995b.

Siguiendo con las ideas anteriores, se ha encontrado que la entropía del sistema está caracterizada por dicha superficie. Al orden más bajo, la entropía escala de manera lineal con el área y, considerando términos a orden superior, existen términos de corrección que son función del área $s(A)$, Krasnov y Rovelli, 2009.

Ahora, considérese la relación área-entropía de agujeros negros

$$S = \frac{A}{4l_p^2} k_B, \quad (5.1)$$

que se deriva de las relaciones termodinámicas para agujeros negros, descritas por Bardeen, Carter y Hawking, 1973. Considerando una corrección de la forma $s(A)$ en la relación anterior, la entropía de la superficie Ω del sistema en cuestión es

$$S_\Omega = \frac{A}{4l_p^2} k_B + k_B s(A). \quad (5.2)$$

En orden de encontrar la ecuación para la fuerza producida por dicha entropía, se asume lo siguiente:

1. Si la partícula de prueba m cambia su posición como

$$\Delta x_0 = \beta \lambda_m, \quad (5.3)$$

donde β es una constante cercana a 1, la entropía de Ω cambia en una unidad fundamental ΔS_0 , definida por la relación

$$\Delta S = \Delta A \left(\frac{c^3}{4\hbar G} + \frac{\partial s}{\partial A} \right) k_B. \quad (5.4)$$

2. La energía de la superficie se identifica con la energía en reposo de la fuente de campo M

$$E_\Omega = Mc^2. \quad (5.5)$$

Puede decirse entonces que toda la energía al interior de la superficie está proyectada sobre ella.

3. Sobre Ω viven ciertos "bytes" de información y el área ocupada por éstos escala como

$$A = QN, \quad (5.6)$$

donde N es el número de bytes y Q es la dimensión fundamental de área, tal que $A_0 = Q$ si $N = 1$.

4. La superficie Ω está en equilibrio térmico a temperatura T y su energía está distribuida de forma equivalente sobre los bytes, tal que

$$E_\Omega = \alpha N \frac{1}{2} k_B T, \quad (5.7)$$

donde α es una constante que representa el número de bits de energía por cada byte.

5. La fuerza entre las partículas está dada por la forma usual de las fuerzas entrópicas, descritas en termodinámica por la ecuación de estado

$$F = T \frac{\Delta S}{\Delta x}, \quad (5.8)$$

donde ΔS es la unidad de cambio de entropía si $|\Delta x| = \beta \lambda_m$ y el gradiente de entropía apunta de afuera hacia adentro de la superficie.

Igualando las ecuaciones (5,5) y (5,7)

$$Mc^2 = \alpha N \frac{1}{2} k_B T, \quad \Longleftrightarrow \quad T = \frac{2Mc^2}{\alpha N k_B}.$$

Donde el número de bytes, según (5,6), es $N = \frac{A}{Q}$ y el área de la superficie es $A = 4\pi R^2$. El radio que aparece en la ecuación para el área describe la distancia entre el origen (situado en M) y cualquier punto de la superficie Ω . Considerando que la distancia entre Ω y la partícula de prueba m es del orden de λ_m , puede argumentarse que

$$R_\Omega \approx R_m,$$

por lo que, en adelante, se considerará a R como el radio de la partícula de prueba.

Entonces, la ecuación para T se vuelve

$$T = \frac{2Mc^2}{\alpha k_B} \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{Mc^2 Q}{2\alpha \pi k_B R^2}. \quad (5.9)$$

Por otro lado, el cambio fundamental en la entropía ΔS para un cambio en la distancia Δx , definido por (5,4), se escribe como

$$\Delta S_0 = Q \left(\frac{c^3}{4\hbar G} + \frac{\partial s}{\partial A} \right) k_B. \quad (5.10)$$

Luego, sustituyendo las relaciones (5,3), (5,9) y (5,10) en la ecuación para la fuerza (5,8)

$$\begin{aligned} F &= \frac{Mc^2 Q}{2\alpha \pi k_B R^2} \frac{Q \left(\frac{c^3}{4\hbar G} + \frac{\partial s}{\partial A} \right) k_B}{\frac{\hbar}{mc^2}}, \\ \Rightarrow F &= - \frac{Mm}{R^2} \left(\frac{Q^2 c^3}{2\pi \hbar \alpha \beta} \right) \left[\frac{c^3}{4\hbar G} + \frac{\partial s}{\partial A} \right] \Big|_{4\pi R^2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

El signo negativo proviene de considerar la dirección del gradiente de entropía. También se considera la relación para el área. En la ecuación anterior los parámetros desconocidos son Q , α y β . Sabiendo que Q está determinada por la teoría microscópica, se establece que, si se cumple

$$Q^2 = 8\pi \alpha \beta l_p^4 = 8\pi \alpha \beta \left(\frac{G\hbar}{c^3} \right)^2,$$

entonces la ecuación para la fuerza (5,11) se reescribe como

$$\begin{aligned} F &= - \frac{Mm}{R^2} \left(\frac{8\pi\alpha\beta G^2 \hbar^2}{c^6} \right) \left(\frac{c^3}{2\pi\hbar\alpha\beta} \right) \left[\frac{c^3}{4\hbar G} + \frac{\partial s}{\partial A} \right] \Big|_{4\pi R^2} \\ &= - \frac{Mm}{R^2} \left(\frac{4G^2 \hbar^2}{c^3} \right) \left[\frac{c^3}{4\hbar G} + \frac{\partial s}{\partial A} \right] \Big|_{4\pi R^2}. \end{aligned}$$

Luego, considerando la definición para la **longitud de Planck**

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}.$$

Entonces

$$F = - \frac{GMm}{R^2} \left[\hbar^2 + \frac{4l_p^2}{c^3} \frac{\partial s}{\partial A} \right] \Big|_{4\pi R^2}.$$

Finalmente, reescribiendo en unidades naturales ($c = 1, \hbar = 1$)

$$F = - \frac{GMm}{R^2} \left[1 + 4l_p^2 \frac{\partial s}{\partial A} \right] \Big|_{4\pi R^2}. \quad (5.12)$$

Nótese que la ecuación obtenida es, tomando solo el primer término, la ecuación de gravitación universal de Newton (2,3). La corrección del segundo término contiene información acerca de la modificación a la entropía (5,2), que hasta ahora es una función general del área.

Ahora, partiendo de una entropía propuesta, se desarrolla el problema de Kepler para órbitas planetarias, resolviendo la ecuación para la fuerza modificada y obteniendo una relación para la precesión en el ángulo. En particular, se calcula el valor de dicha precesión para la órbita de Mercurio y se obtienen cotas para los parámetros libres de la entropía.

5.2. Obtención de la ecuación diferencial

Tomando como corrección a la entropía la propuesta de Díaz-Saldaña, López-Domínguez y Sabido, 2018b, se considera la siguiente relación para la entropía:

$$\frac{S[A]}{k_B} = \frac{A}{4l_p^2} - \frac{\gamma}{2} \ln \frac{A}{4l_p^2} + \alpha \left(\frac{A}{4l_p^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \beta \left(\frac{A}{2l_p^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (5.13)$$

El término lineal en A que aparece en la entropía es el término usual de Relatividad General, que aparece en la relación área-entropía para agujeros negros. El término $A^{\frac{3}{2}}$, que escala como el volumen, se relaciona con los grados de libertad de teoría cuántica de campos y ha sido derivado en algunos modelos para los grados de libertad microscópicos que comprende la entropía de un agujero negro. El término que escala como $A^{\frac{1}{2}}$ aparece en el estudio de un gas autogravitatorio. Por último, el término logarítmico aparece en la cuantización de microestados en distintas teorías de gravedad independientes.

Dado que en este modelo no se asume el origen de las correcciones a la fuerza, se

considera que todos los términos anteriores contribuyen a la entropía del sistema a considerar. Para este modelo, los términos γ , α y β en la entropía, son parámetros a determinar.

Se escribe tal propuesta en la forma convencional

$$\frac{S[A]}{k_B} = \frac{A}{4l_p^2} + s(A),$$

donde

$$s(A) = -\frac{\gamma}{2} \ln \frac{A}{4l_p^2} + \alpha \left(\frac{A}{4l_p^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \beta \left(\frac{A}{2l_p^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

La fuerza modificada que proviene de la entropía corregida (5.13), cumple la relación (5.12)

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{GMm}{R^2} \left[1 + 4l_p^2 \left(-\frac{\gamma}{2A} + \frac{\alpha}{4l_p A^{1/2}} + \frac{3}{2} \frac{A^{1/2}}{(2l_p^2)^{3/2}} \beta \right) \right] \Big|_{4\pi R^2} \hat{\mathbf{R}} \\ &= -\frac{GMm}{R^2} \left[1 - \frac{l_p^2}{2\pi R^2} \gamma + \frac{l_p}{2\sqrt{\pi} R} \alpha + \frac{3\sqrt{2\pi} R}{l_p} \beta \right] \hat{\mathbf{R}}. \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación para la fuerza es

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{R^2} \left[1 + \frac{3\sqrt{2\pi} R}{l_p} \beta + \frac{l_p}{2\sqrt{\pi} R} \alpha - \frac{l_p^2}{2\pi R^2} \gamma \right] \hat{\mathbf{R}}. \quad (5.14)$$

Es importante en este punto señalar las contribuciones de cada uno de los parámetros de corrección a la fuerza:

- La corrección de β va como $\frac{1}{R}$.
- La corrección de α va como $\frac{1}{R^3}$.
- La corrección de γ va como $\frac{1}{R^4}$.

Ahora, se resolverá el problema de los dos cuerpos para un sistema clásico utilizando la fuerza corregida (5.14). Con base en lo desarrollado en el capítulo 2 para este sistema, en particular de la ecuación (2.13), se sabe que para el sistema en de dos cuerpos el momento angular es conservado. Del desarrollo clásico se toman las relaciones

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \mathbf{L} = m\mathbf{h}. \quad (5.15)$$

Donde $\mathbf{h}$ es un vector constante y h es la magnitud de momento angular por unidad de masa. La ecuación corregida para la fuerza debe también cumplir con las leyes de Newton, al tratarse de un sistema clásico. De la segunda ley de Newton (2.1)

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}.$$

Primero, el vector posición del lado derecho de la igualdad, $\mathbf{r} = (x, y)$, se expresa en las coordenadas polares

$$x = R \cos \phi \hat{i}, \quad y = R \sin \phi \hat{j}.$$

Entonces, se escriben los vectores unitarios para R y ϕ , en función de la transformación anterior

$$\hat{R} = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}. \quad (5.16)$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}. \quad (5.17)$$

Entonces, recordando que R y ϕ son funciones del tiempo, la aceleración es

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{R}(\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) + 2\dot{R}\dot{\phi}(-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}) + R\ddot{\phi}(-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}) - R\dot{\phi}(\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}).$$

En términos de los vectores unitarios 5,16 y 5,17

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\hat{R} + (2\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi})\hat{\phi} \\ &= (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\hat{R} + \frac{1}{R} \frac{d}{dt}(R^2\dot{\phi})\hat{\phi}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

reescribiendo el segundo término como la derivada de un producto.

Entonces, sustituyendo los valores para F_M y $\ddot{\mathbf{r}}$, de (5,14) y (5,18), respectivamente, la segunda ley de Newton se escribe como

$$(\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\hat{R} + \frac{1}{R} \frac{d}{dt}(R^2\dot{\phi})\hat{\phi} = -\frac{GM}{R^2} \left[1 + \frac{3\sqrt{2\pi}R}{l_p}\beta + \frac{l_p}{2\sqrt{\pi}R}\alpha - \frac{l_p^2}{2\pi R^2}\gamma \right] \hat{R}. \quad (5.19)$$

Luego, tomando el producto escalar con $\hat{\phi}$,

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dt}(R^2\dot{\phi}) = 0.$$

Se observa que $R^2\dot{\phi}$ es una cantidad angular conservada y, en analogía con el problema clásico sin correcciones, se identifica esta cantidad con la magnitud h definida anteriormente, en la ecuación (5,15). Entonces

$$\begin{aligned} R^2\dot{\phi} &= h, \\ \Rightarrow \dot{\phi} &= \frac{d\phi}{dt} = \frac{h}{R^2}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Ahora, tomando el producto escalar con $\hat{R}$ en la ecuación (5.19),

$$\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 = -\frac{\mu}{R^2} \left[1 + \frac{3\sqrt{2\pi}R}{l_p}\beta + \frac{l_p}{2\sqrt{\pi}R}\alpha - \frac{l_p^2}{2\pi R^2}\gamma \right], \quad (5.21)$$

con $\mu \equiv GM$.

Recurriendo de nuevo a la analogía con el problema clásico, considérese que para este sistema se requiere una ecuación para las órbitas de la forma $R = R(\phi)$. Con

este propósito, si se introduce la variable

$$u \equiv \frac{1}{R},$$

y se reescriben los términos de las derivadas respecto a R ,

$$\begin{aligned}\dot{R} &= \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) \\ &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{dt}.\end{aligned}$$

Luego, utilizando (5.20),

$$\begin{aligned}\dot{R} &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \frac{h}{R^2} \\ &= -h \frac{du}{d\phi}.\end{aligned}$$

Derivando la expresión anterior,

$$\begin{aligned}\ddot{R} &= -\frac{d}{dt} \left(h \frac{du}{d\phi} \right) = -h \frac{d^2u}{d\phi^2} \frac{d\phi}{dt} \\ &= -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\phi^2},\end{aligned}$$

por lo que (5.21) puede reescribirse como

$$-h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\phi^2} - \frac{1}{u} (hu^2) = -\mu u^2 \left[1 + \frac{3\sqrt{2\pi}}{l_p u} \beta + \frac{l_p u}{2\sqrt{\pi}} \alpha - \frac{l_p^2 u^2}{2\pi} \gamma \right], \quad (5.22)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \left[1 + \frac{3\sqrt{2\pi}}{l_p} \beta u^{-1} + \frac{l_p}{2\sqrt{\pi}} \alpha u - \frac{l_p^2}{2\pi} \gamma u^2 \right]. \quad (5.23)$$

Nótese que, tomando únicamente el primer término del lado derecho, se tiene la ecuación diferencial de Binet para las órbitas planetarias. Dicha ecuación tiene la ecuación para secciones cónicas (2.24) como solución. La ecuación (5.23) es entonces la versión corregida de la ecuación de Binet para un sistema clásico.

5.3. La ecuación de movimiento

En orden de utilizar un método perturbativo para resolver la ecuación diferencial obtenida en la sección anterior, se introduce el parámetro

$$\varepsilon \equiv 3 \frac{\mu^2}{h^2},$$

donde $\varepsilon \ll 1$ para el sistema en cuestión. Para Mercurio, por ejemplo, $\varepsilon \sim 10^{-7}$. Reescribiendo (5.23) en términos de este parámetro

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{h^2 \sqrt{2\pi}}{\mu^2 l_p} \beta u^{-1} + \frac{h^2 l_p}{6\mu^2 \sqrt{\pi}} \alpha u - \frac{h^2 l_p^2}{6\mu^2 \pi} \gamma u^2 \right) \right],$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{d\phi^2} + \left(1 - \varepsilon \frac{l_p}{6\mu\sqrt{\pi}} \alpha\right) u = \frac{\mu}{h^2} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{h^2 \sqrt{2\pi}}{\mu^2 l_p} \beta u^{-1} - \frac{h^2 l_p^2}{6\mu^2 \pi} \gamma u^2\right)\right]. \quad (5.24)$$

Luego, definiendo

$$\rho \equiv \left(1 - \varepsilon \frac{l_p}{6\mu\sqrt{\pi}} \alpha\right), \quad (5.25)$$

se obtiene

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + \rho u = \frac{\mu}{h^2} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{h^2 \sqrt{2\pi}}{\mu^2 l_p} \beta u^{-1} - \frac{h^2 l_p^2}{6\mu^2 \pi} \gamma u^2\right)\right]. \quad (5.26)$$

donde, para $\alpha = 0$, $\rho = 1$. Considerando los valores numéricos de ε y l_p , donde $\varepsilon \sim 10^{-7}$ y $l_p \sim 10^{-35}$, se asume que el producto $\frac{\varepsilon l_p}{6\mu\sqrt{\pi}} \alpha$ en la definición de ρ es un parámetro pequeño.

Para resolver (5.26) se asume que esta ecuación tiene una solución de la forma

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (5.27)$$

y se introduce dicha solución en la ecuación a resolver, donde la notación u'' indica derivadas respecto de ϕ

$$u_0'' + \varepsilon u_1'' + \rho(u_0 + \varepsilon u_1) = \frac{\mu}{h^2} + \frac{\varepsilon \mu}{h^2} \left(\frac{h^2 \sqrt{2\pi}}{\mu^2 l_p} \beta u_0^{-1} - \frac{h^2 l_p^2}{6\mu^2 \pi} \gamma u_0^2\right).$$

En la ecuación anterior, se suprimen los términos de orden $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ o mayor. Entonces, puede agruparse la ecuación obtenida en potencias de ε . Se obtienen las siguientes ecuaciones para la potencia ε^0 y ε^1 , respectivamente:

$$\begin{cases} u_0'' + \rho u_0 = \frac{\mu}{h^2}, \\ u_1'' + \rho u_1 = \frac{\mu}{h^2} \left(\frac{h^2 \sqrt{2\pi}}{\mu^2 l_p} \beta u_0^{-1} - \frac{h^2 l_p^2}{6\mu^2 \pi} \gamma u_0^2\right). \end{cases} \quad (5.28)$$

Primero se resuelve la ecuación de orden ε^0 ,

$$\frac{d^2 u_0}{d\phi^2} + \rho u_0 = \frac{\mu}{h^2},$$

para la cual es necesario resolver antes la ecuación homogénea

$$\frac{d^2 u_0}{d\phi^2} + \rho u_0 = 0,$$

que tiene como solución

$$u_0 = A \cos \sqrt{\rho} \phi,$$

donde $\sqrt{\rho} \phi$ es el argumento del coseno. Así mismo, puede comprobarse que la ecuación

$$u_0 = A \cos \sqrt{\rho} \phi + \frac{\mu}{\rho h^2},$$

es solución a la ecuación no homogénea de orden ε^0 . Entonces, la solución completa a la ecuación de orden ε^0 es

$$u_0 = \frac{\mu}{\rho h^2} [1 + e \rho \cos \sqrt{\rho} \phi], \quad (5.29)$$

tomando la constante como $e = \frac{h^2}{\mu}$, en analogía con la ecuación para secciones cónicas. Nótese que dicha ecuación se recupera si $\rho = 1$, es decir, si $\alpha = 0$.

Ahora, tomando la ecuación a orden ε , se sustituye la solución u_0 , obtenida anteriormente, en la segunda ecuación de (5.28), entonces

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + \rho u_1 &= \frac{\mu}{h^2} \left[\frac{h^2 \sqrt{2\pi}}{\mu^2 l_p} \beta \frac{\rho h^2}{\mu} (1 + e \rho \cos \sqrt{\rho} \phi)^{-1} - \frac{h^2 l_p^2}{6\mu^2 \pi} \gamma \left(\frac{\mu}{\rho h^2} \right)^2 (1 + e \rho \cos \sqrt{\rho} \phi)^2 \right] \\ &= \frac{\mu}{h^2} \left[\frac{h^2 \sqrt{2\pi}}{\mu^2 l_p} \beta \frac{\rho h^2}{\mu} (1 - e \rho \cos \sqrt{\rho} \phi) - \frac{h^2 l_p^2}{6\mu^2 \pi} \gamma \left(\frac{\mu}{\rho h^2} \right)^2 (1 + e^2 \rho^2 \cos^2 \sqrt{\rho} \phi \right. \\ &\quad \left. + 2e \rho \cos \sqrt{\rho} \phi) \right], \end{aligned}$$

donde se ha usado la aproximación en serie $(1 + e \rho \cos \sqrt{\rho} \phi)^{-1} \approx 1 - e \rho \cos \sqrt{\rho} \phi$, a primer orden en $e \rho$.

Luego, utilizando la relación

$$\cos^2 \sqrt{\rho} \phi = \frac{1 + \cos 2\sqrt{\rho} \phi}{2},$$

donde los tres términos, $2\sqrt{\rho} \phi$, son parte del argumento, se reescribe la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + \rho u_1 &= \frac{\mu}{h^2} \left\{ \frac{h^2 \sqrt{2\pi}}{\mu^2 l_p} \beta \frac{\rho h^2}{\mu} (1 - e \rho \cos \sqrt{\rho} \phi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{h^2 l_p^2}{6\mu^2 \pi} \gamma \left(\frac{\mu}{\rho h^2} \right)^2 \left[1 + 2e \rho \cos \sqrt{\rho} \phi + e^2 \rho^2 \left(\frac{1 + \cos 2\sqrt{\rho} \phi}{2} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + \rho u_1 &= \frac{\mu}{h^2} \left[\frac{\sqrt{2\pi} h^4}{\mu^3 l_p} \beta \rho - \frac{l_p^2}{6\pi h^2} \frac{\gamma}{\rho^2} \left(1 + \frac{e^2 \rho^2}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\sqrt{2\pi} h^4}{\mu^3 l_p} \beta \rho^2 + \frac{l_p^2}{3\pi h^2} \frac{\gamma}{\rho} \right) e \cos \sqrt{\rho} \phi - \frac{l_p^2}{12\pi h^2} \gamma e^2 \cos 2\sqrt{\rho} \phi \right]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Para la ecuación anterior, se propone una solución de la forma

$$u_1 = A + B \sqrt{\rho} \phi \sin \sqrt{\rho} \phi + C \cos 2\sqrt{\rho} \phi, \quad (5.31)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + \rho u_1 = \rho A + 2B \rho \cos \sqrt{\rho} \phi - 3C \rho \cos 2\sqrt{\rho} \phi. \quad (5.32)$$

Identificando la ecuación (5,30) con (5,32), se tiene

$$\begin{aligned} \rho A + 2B\rho\cos\sqrt{\rho}\phi - 3C\rho\cos 2\sqrt{\rho}\phi = \frac{\mu}{h^2} \left[\frac{\sqrt{2\pi}h^4}{\mu^3 l_p} \beta \rho - \frac{l_p^2}{6\pi h^2} \frac{\gamma}{\rho^2} \left(1 + \frac{e^2 \rho^2}{2} \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{\sqrt{2\pi}h^4}{\mu^3 l_p} \beta \rho^2 + \frac{l_p^2}{3\pi h^2} \frac{\gamma}{\rho} \right) e \cos\sqrt{\rho}\phi - \frac{l_p^2}{12\pi h^2} \gamma e^2 \cos 2\sqrt{\rho}\phi \right]. \end{aligned} \quad (5.33)$$

De la ecuación anterior, se identifican los valores de A, B y C como

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu}{\rho h^2} \left[\frac{\sqrt{2\pi}h^4}{\mu^3 l_p} \beta \rho - \frac{l_p^2}{6\pi h^2} \frac{\gamma}{\rho^2} \left(1 + \frac{e^2 \rho^2}{2} \right) \right], \\ B &= -\frac{e\mu}{2\rho h^2} \left(\frac{\sqrt{2\pi}h^4}{\mu^3 l_p} \beta \rho^2 + \frac{l_p^2}{3\pi h^2} \frac{\gamma}{\rho} \right), \\ C &= \frac{\mu}{h^2} \left(\frac{e^2 l_p^2}{36\pi h^2} \frac{\gamma}{\rho} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo los valores de A, B y C en (5,31), la solución u_1 es

$$\begin{aligned} u_1 = \frac{\mu}{\rho h^2} \left[\frac{\sqrt{2\pi}h^4}{\mu^3 l_p} \beta \rho - \frac{l_p^2}{6\pi h^2} \frac{\gamma}{\rho^2} \left(1 + \frac{e^2 \rho^2}{2} \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{\sqrt{2\pi}h^4}{2\mu^3 l_p} \beta \rho^2 + \frac{l_p^2}{6\pi h^2} \frac{\gamma}{\rho} \right) e \sqrt{\rho} \phi \sin\sqrt{\rho}\phi + \frac{l_p^2}{36\pi h^2} \gamma e^2 \cos 2\sqrt{\rho}\phi \right]. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Siendo esta solución una corrección, puede notarse que los términos constantes y el término periódico, contribuirán de forma mínima al cambio en la trayectoria de la órbita y a la posición de los ápsides. Por lo tanto, se considera únicamente como relevante la corrección de la forma $\phi \sin\phi$, quedando las soluciones como

$$\begin{cases} u_0 = \frac{\mu}{\rho h^2} [1 + e\rho\cos\sqrt{\rho}\phi], \\ u_1 = -\frac{\mu}{\rho h^2} \left(\frac{\sqrt{2\pi}h^4}{2\mu^3 l_p} \beta \rho^2 + \frac{l_p^2}{6\pi h^2} \frac{\gamma}{\rho} \right) e \sqrt{\rho} \phi \sin\sqrt{\rho}\phi. \end{cases} \quad (5.35)$$

Introduciendo estos resultados en la solución propuesta (5,32), se obtiene, como solución a (5,26)

$$u = \frac{\mu}{\rho h^2} \left[1 + e\rho\cos\sqrt{\rho}\phi - \left(\frac{\sqrt{2\pi}h^4}{2\mu^3 l_p} \beta \rho^2 + \frac{l_p^2}{6\pi h^2} \frac{\gamma}{\rho} \right) \varepsilon e \sqrt{\rho} \phi \sin\sqrt{\rho}\phi \right]. \quad (5.36)$$

Definiendo

$$\phi' \equiv \sqrt{\rho}\phi, \quad \delta \equiv -\frac{\varepsilon}{\rho} \left(\frac{\sqrt{2\pi}h^4}{2\mu^3 l_p} \beta \rho^2 + \frac{l_p^2}{6\pi h^2} \frac{\gamma}{\rho} \right), \quad (5.37)$$

se reescribe la solución como

$$u = \frac{\mu}{\rho h^2} \{1 + e\rho [\cos\phi' + \delta\phi' \sin\phi']\}. \quad (5.38)$$

Finalmente, utilizando la relación

$$\cos(\phi' - \delta\phi') = \cos\phi' \cos\delta\phi' + \sin\delta\phi' \sin\phi' \approx \cos\phi' + \delta\phi' \sin\phi',$$

y con la aproximación $\delta \ll 1$, puede escribirse (5,36) como

$$u = \frac{\mu}{\rho h^2} \{1 + e\rho \cos[\sqrt{\rho}\phi(1 - \delta)]\}. \quad (5.39)$$

Puede observarse que la ecuación obtenida es la ecuación u_0 , salvo el parámetro δ en el ángulo. Esta ecuación describe la trayectoria orbital de un planeta, derivada de una fuerza clásica corregida. u_0 puede recuperarse de la ecuación anterior, si α y γ se anulan.

5.4. Precesión

Teniendo la ecuación para la trayectoria obtenida en la sección anterior, se calcula el valor de ϕ necesario para completar un periodo $\tau = 2\pi$ en el argumento del coseno

$$\begin{aligned} \tau = 2\pi &= \sqrt{\rho}\phi_\tau(1 - \delta), \\ \Rightarrow \phi_\tau &= \frac{2\pi}{\sqrt{\rho}}(1 - \delta)^{-1} \approx 2\pi\sqrt{\rho}(1 + \delta), \end{aligned}$$

a orden δ . Sustituyendo los valores de ρ y δ , definidos por (5,25) y (5,37), respectivamente

$$\begin{aligned} \phi_\tau &\approx 2\pi(1 + \delta) \left(1 - \frac{\varepsilon l_p \alpha}{6\mu\sqrt{\pi}}\right)^{-1/2} \approx 2\pi \left[1 - \frac{\varepsilon}{\rho} \left(\frac{\sqrt{2\pi}h^4}{2\mu^3 l_p} \beta \rho^2 + \frac{l_p^2}{6\pi h^2} \frac{\gamma}{\rho}\right)\right] \left(1 + \frac{\varepsilon l_p \alpha}{12\mu\sqrt{\pi}}\right), \\ \Rightarrow \phi_\tau &\approx 2\pi \left[1 - \frac{\varepsilon}{\rho} \left(\frac{\sqrt{2\pi}h^4}{2\mu^3 l_p} \beta \rho^2 + \frac{l_p^2}{6\pi h^2} \frac{\gamma}{\rho}\right) + \frac{\varepsilon l_p \alpha}{12\mu\sqrt{\pi}}\right], \end{aligned}$$

a orden ε . Considerando que, para el movimiento planetario en gravedad clásica, se tiene un período completo cuando el ángulo $\phi = 2\pi$, se identifica la corrección a dicho período como Δ_τ

$$\phi_\tau \approx 2\pi + \Delta_\tau$$

Entonces

$$\Delta_\tau \approx 2\pi\varepsilon \left(\frac{l_p \alpha}{12\mu\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{2\pi}h^4}{2\mu^3 l_p} \beta \rho - \frac{l_p^2}{6\pi h^2} \frac{\gamma}{\rho^2}\right). \quad (5.40)$$

Sustituyendo nuevamente el valor de ρ y permaneciendo a orden ε

$$\Delta_\tau \approx 2\pi\varepsilon \left(\frac{l_p \alpha}{12\mu\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{2\pi}h^4}{2\mu^3 l_p} \beta - \frac{l_p^2}{6\pi h^2} \gamma\right). \quad (5.41)$$

Finalmente, se sustituye la definición de μ , el valor de ε y la relación, conocida por analogía con el sistema clásico,

$$h^2 = GMa(1 - e^2),$$

donde a es la menor distancia de la órbita al origen. Entonces la ecuación para el ángulo Δ_τ es

$$\Delta_\tau \approx \frac{\sqrt{\pi}l_p}{2a(1 - e^2)}\alpha - \frac{3\pi\sqrt{2\pi}a(1 - e^2)}{l_p}\beta - \frac{l_p^2}{a^2(1 - e^2)^2}\gamma. \quad (5.42)$$

Esta ecuación describe al ángulo de precesión para una órbita general en el modelo entrópico.

5.4.1. Precesión de la órbita de Mercurio

Para el caso de Mercurio, se tienen los siguientes datos:

$$GM = 1,327 \times 10^{20} \frac{m^3}{s^2},$$

$$a = 5,7909 \times 10^{10} m,$$

$$e = 0,2056.$$

Introduciendo dichos datos a la solución encontrada para la precesión, se tiene

$$\Delta_{\tau M} = (2,581 \times 10^{-46})\alpha - (8,102 \times 10^{46})\beta - (8,503 \times 10^{-92})\gamma. \quad (5.43)$$

En orden de acotar este modelo alternativo, de manera análoga a Romero y Vergara, 2003, se considera el ángulo de precesión reportado para la órbita de mercurio

$$\Delta_{obs} = 2\pi(7,98734 \pm 0,00037 \times 10^{-8}) \frac{rad}{rev}, \quad (5.44)$$

mientras que, el calculado con Relatividad General es

$$\Delta_{GR} = 2\pi(7,987344 \times 10^{-8}) \frac{rad}{rev}. \quad (5.45)$$

Por lo tanto, se requiere que cualquier corrección a la precesión del perihelio de Mercurio, cumpla la siguiente relación

$$|\Delta_G| \leq |\Delta_{obs} - \Delta_{GR}| = 2\pi \times 10^{-12} \frac{rad}{rev}. \quad (5.46)$$

Teniendo la condición anterior, debe cumplirse

$$|(2,581 \times 10^{-46})\alpha - (8,102 \times 10^{46})\beta - (8,503 \times 10^{-92})\gamma| \leq 2\pi \times 10^{-12}. \quad (5.47)$$

Esta restricción se traduce en cotas para los parámetros libres α , β y γ , las cuales se obtienen al asumir que, la corrección a la entropía viene completamente de cada parámetro.

- Parámetro α :

$$|(2,581 \times 10^{-46})\alpha| \leq 2\pi \times 10^{-12}.$$

Entonces

$$-2,434 \times 10^{34} \leq \alpha \leq 2,434 \times 10^{34}. \quad (5.48)$$

■ Parámetro β :

$$|(8,102 \times 10^4)\beta| \leq 2\pi \times 10^{-12}.$$

Entonces

$$-7,755 \times 10^{-58} \leq \beta \leq 7,755 \times 10^{-58}. \quad (5.49)$$

■ Parámetro γ :

$$|(8,503 \times 10^{-92})\gamma| \leq 2\pi \times 10^{-12}.$$

Entonces

$$-7,389 \times 10^{79} \leq \gamma \leq 7,389 \times 10^{79}. \quad (5.50)$$

Los anteriores son los valores máximo y mínimo que puede tener cada parámetro de corrección en la entropía del modelo (5,13), para que éste sea consistente con las observaciones y con el resultado de Relatividad General.

Capítulo 6

Discusión y conclusiones

De los resultados obtenidos en el capítulo anterior

$$\begin{aligned} -2,434 \times 10^{34} &\leq \alpha \leq 2,434 \times 10^{34}, \\ -7,755 \times 10^{-58} &\leq \beta \leq 7,755 \times 10^{-58}, \\ -7,389 \times 10^{79} &\leq \gamma \leq 7,389 \times 10^{79}, \end{aligned}$$

puede observarse lo siguiente: Las cotas para cada parámetro tienen órdenes de magnitud muy diferentes entre sí. Además, ninguno de los valores es cercano a la unidad ni a órdenes de magnitud característicos para este sistema. Por lo anterior es necesario verificar la contribución de cada parámetro, comparando con otros sistemas y analizar la relevancia de cada término de corrección a la fuerza.

La presencia del parámetro α en la ecuación base podría proporcionar una segunda cota para éste, sin embargo, el valor máximo para este parámetro es muy grande, si se le atribuye la contribución completa a la corrección de la entropía. Además, observando el término de la fuerza para este parámetro, que va como $\frac{1}{R^3}$, se espera que para valores grandes de R el término no tenga presencia en la corrección. Considerando los dos motivos anteriores, es improbable que el término con parámetro α aparezca en la corrección a la entropía en este sistema.

Con argumentos similares a los anteriores, se espera que la contribución del parámetro γ sea insignificante a esta escala. El valor tan grande obtenido para sus cotas y el término de la fuerza que va como $\frac{1}{R^4}$, sugieren que este término no representará una corrección significativa para la entropía de este sistema. Además, como se mencionó, este término agregado a la entropía está relacionado con los grados de libertad cuánticos del sistema, por lo que no se espera observar sus efectos a esta escala.

El parámetro β contribuye a la fuerza con un término de la forma $\frac{1}{R}$, el cual representa una contribución importante, si se considera que la ecuación de gravitación a modificar decae como $\frac{1}{R^2}$. El valor obtenido para sus cotas coincide con el resultado del desarrollo de las curvas de rotación de galaxias utilizando la misma modificación a la entropía, Díaz-Saldaña, López-Domínguez y Sabido, 2018b. Este valor también es consistente con el obtenido al proponer un origen entrópico de la constante cosmológica, modificando las ecuaciones de Friedmann, donde se obtiene que el parámetro de la corrección debe ser del orden 10^{-60} , Díaz-Saldaña, López-Domínguez y Sabido, 2018a.

Considerando los argumentos anteriores, se concluye que los términos de corrección a la entropía, de los parámetros α y γ es decir, las correcciones que escalan como la longitud ($A^{\frac{1}{2}}$) y como el $\ln(A)$, respectivamente, no representan una corrección significativa a la entropía de este sistema. Por lo tanto, la única corrección relevante a la entropía de un sistema planetario, medida específicamente para la trayectoria de Mercurio, es la que escala como el volumen ($A^{\frac{1}{3}}$).

Durante el desarrollo de este modelo se procuró escribir las ecuaciones de tal forma que los términos para cada parámetro pudieran considerarse por separado. Por lo tanto, basta con anular en las ecuaciones obtenidas (5,13), (5,14) y (5,42), los términos para α y γ . Entonces, las ecuaciones de la formulación entrópica que describen la fuerza y precesión de las órbitas planetarias, son:

Para la entropía

$$\frac{S[A]}{k_B} = \frac{A}{4l_p^2} + \beta \left(\frac{A}{2l_p^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Para la fuerza

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{R^2} \left[1 + \frac{3\sqrt{2\pi}R}{l_p} \beta \right] \hat{\mathbf{R}}.$$

Para la precesión

$$\Delta\tau \approx \frac{3\pi\sqrt{2\pi}a(1-e^2)}{l_p} \beta.$$

Lo siguiente a desarrollar son pruebas para la consistencia del parámetro β en sistemas a diferentes escalas. También se pretende incluir los tres términos como corrección a la entropía de otros sistemas, para probar si las correcciones que escalan como la longitud y el logaritmo tienen presencia en otros sistemas y saber a qué escalas esto sucede. La próxima prueba a realizar con la entropía propuesta, incluyendo los términos de los tres parámetros, es la formulación entrópica para la curvatura de la luz. La descripción de este fenómeno, como se mencionó, constituye otra de las pruebas clásicas de la Relatividad General, por lo que es necesario probar el modelo de entropía para este fenómeno, siguiendo con la secuencia de este trabajo.

Apéndice A

Curvatura de la luz

Otra de las pruebas clásicas existosas para la Relatividad General es el fenómeno de flexión de los rayos de luz.

Para calcular la trayectoria de la luz en un campo gravitacional esféricamente simétrico (solución de Schwarzschild, ec. 4,1) se considera que la luz viaja sobre una geodésica nula. En este caso, la ecuación (4,2) se vuelve

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = 0, \quad (\text{A.1})$$

donde el punto sobre las coordenadas representa ahora la derivada con respecto al parámetro afín.

El procedimiento de la ecuación (4,3) a (4,7) es idéntico. Para la ecuación (4,8), se tiene

$$k^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 = 0. \quad (\text{A.2})$$

Bajo las mismas definiciones, se reescribe la ecuación anterior

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{k^2}{h^2} + 2mu^3,$$

como ecuación de primer orden para la trayectoria de un rayo de luz. La ecuación de segundo orden es

$$\frac{d^2 u}{d\phi} + u = 3mu^2. \quad (\text{A.3})$$

A.0.1. Límite de Relatividad Especial

Considerando $m = 0$ en la ecuación anterior,

$$\frac{d^2 u}{d\phi} + u = 0,$$

cuya solución puede escribirse como

$$u = \frac{\sin(\phi - \phi_0)}{D}, \quad (\text{A.4})$$

con $D = cte$.

Nótese que, siendo la ecuación de la recta en coordenadas polares

$$r = \frac{D}{\cos(\phi - \alpha)},$$

la solución (A,4) es la ecuación de una línea recta para el intervalo $\phi \in (\phi_0, \phi_0 + \pi)$, donde D es la distancia de mayor acercamiento al origen. Dicho resultado coincide con lo predicho por gravedad Newtoniana.

A.0.2. Método perturbativo

En este caso, se considera la cantidad adimensional mu o $\frac{m}{r}$ de la ec. (A,3) como pequeña y se propone una solución de la forma

$$u = u_0 + 3mu_1, \quad (\text{A.5})$$

considerando la solución u_0 como la ecuación (A,4). Entonces, se reescribe (A,3) como

$$u_0'' + 3mu_1'' + u_0 + 3mu_1 = 3mu_0^2$$

a orden m . Siendo $u_0'' = u_0$,

$$u_1'' + u_1 = u_0^2 = \frac{\sin^2 \phi}{D^2}. \quad (\text{A.6})$$

En la ecuación anterior se ha fijado la fase $\phi_0 = 0$. En orden de resolver tal ecuación, se considera primero la ecuación homogénea

$$u_1'' + u_1 = 0,$$

cuya solución puede escribirse como

$$u_1 = C \cos \phi,$$

para una fase cero. Luego, se reescribe (A,6) como

$$u_{1p}'' + u_{1p} = \frac{1}{D^2} (1 - \cos^2 \phi) = \frac{1}{D^2} \left(\frac{1 - \cos 2\phi}{2} \right). \quad (\text{A.7})$$

Ahora, se propone la solución de la forma

$$\begin{aligned} u_{1p} &= A + B \sin 2\phi + C \cos 2\phi, \\ \Rightarrow u_{1p}'' + u_{1p} &= A - 3B \sin 2\phi - 3C \cos 2\phi. \end{aligned}$$

En comparación con (A,7) se fijan los valores para A, B, C

$$A = \frac{1}{2D^2}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{6D^2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} u_{1p} &= \frac{1}{2D^2} + \frac{1}{6D^2} \cos 2\phi = \frac{1}{2D^2} + \frac{1}{6D^2} (2\cos^2 \phi - 1), \\ \Rightarrow u_{1p} &= \frac{1 + \cos^2 \phi}{3D^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Junto con la solución a la ecuación homogénea, la solución general para (A,6) es

$$u_1 = \frac{1 + C \cos \phi + \cos^2 \phi}{3D^2}. \quad (\text{A.9})$$

Por lo tanto, la solución de la forma (A,5) es

$$u = \frac{\sin\phi}{D} + \frac{m(1 + C\cos\phi + \cos^2\phi)}{D^2}. \quad (\text{A.10})$$

Al considerar pequeño el coeficiente $\frac{m}{D}$, puede verse a la ecuación anterior como una perturbación al movimiento en línea recta anteriormente obtenido.

Para un punto lejano al origen ($u \rightarrow 0$) la ecuación (A,10) se vuelve

$$\frac{\sin\phi}{D} + \frac{m(1 + C\cos\phi + \cos^2\phi)}{D^2} = 0,$$

y observando la siguiente figura, se consideran los ángulos para las asíntotas de la trayectoria $-\varepsilon_1$ y $\pi + \varepsilon_2$

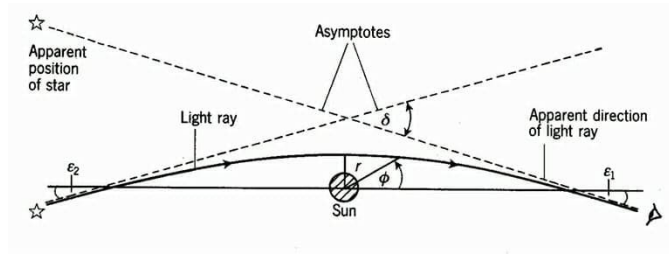


FIGURA A.1

Luego, sustituyendo dichos ángulos en la solución (A,10) se tiene: Para ε_1

$$\begin{aligned} \frac{-\varepsilon_1}{D} + \frac{m}{D^2}(2 + C) &= 0, \\ \Leftrightarrow \varepsilon_1 &= \frac{m}{D}(2 + C). \end{aligned}$$

Para ε_2

$$\begin{aligned} \frac{-\varepsilon_2}{D} + \frac{m}{D^2}(2 - C) &= 0, \\ \Leftrightarrow \varepsilon_2 &= \frac{m}{D}(2 - C). \end{aligned}$$

Para obtener los resultados anteriores, se ha usado la aproximación para ángulos pequeños en las funciones seno y coseno.

Ahora, se usa la relación geométrica

$$\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

que puede verse fácilmente en la figura, con ello

$$\delta = \frac{m}{D}(2 + C) + \frac{m}{D}(2 - C) = \frac{4m}{D}.$$

Finalmentel la ecuación expresada en unidades no relativistas es

$$\delta = \frac{4GM}{c^2 D}. \quad (\text{A.11})$$

donde δ es el ángulo de deflexión para un rayo de luz en presencia de un campo

gravitacional con simetría esférica.

La primer medida de este fenómeno fue realizada por **Sir Arthur Eddington** en 1929, durante un eclipse total. En esta observación se compararon las posiciones de las estrellas que aparecen cercanas al sol, durante el eclipse y durante la noche, con el fin de captar una diferencia en sus trayectorias debida a la presencia del campo gravitacional generado por el sol. Las mediciones más actuales de estas diferencias están entre 1,57 y $1,82 \pm 0,2$ segundos de arco.

Si se consideran rayos de luz paralelos provenientes de una fuente lejana, la presencia de un objeto masivo provocará la deflexión de dichos rayos y su convergencia en un punto paralelo al eje en que éstos viajan. En este caso las fuentes de campo gravitacional esféricamente simétrico actúan como **lentes gravitacionales**, como se observa en la figura.

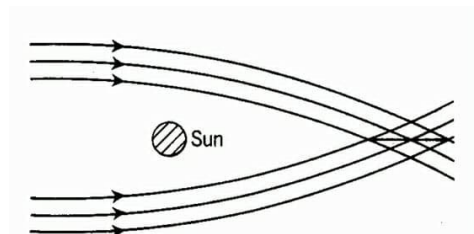


FIGURA A.2

Bibliografía

- Abbott, B. P. y col. (2016). «GW150914: Implications for the Stochastic Gravitational-Wave Background from Binary Black Holes». En: *Phys. Rev. Lett.* 116 (13), pág. 131102. DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.131102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.131102). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.131102>.
- Bardeen, James M., B. Carter y S. W. Hawking (1973). «The Four laws of black hole mechanics». En: *Commun. Math. Phys.* 31, págs. 161-170. DOI: [10.1007/BF01645742](https://doi.org/10.1007/BF01645742).
- Bekenstein, J. D. (1972). «Black holes and the second law». En: *Lett. Nuovo Cim.* 4, págs. 737-740. DOI: [10.1007/BF02757029](https://doi.org/10.1007/BF02757029).
- Bodendorfer, Norbert (2016). «An elementary introduction to loop quantum gravity». En: arXiv: [1607.05129](https://arxiv.org/abs/1607.05129) [gr-qc].
- Chandrasekhar, S. (1986). «Karl Schwarzschild Lecture: The Aesthetic Base of the General Theory of Relativity». En: *Mitteilungen der Astronomischen Gesellschaft Hamburg* 67, pág. 19.
- d’Inverno, Ray (1998). *Introducing Einstein’s Relativity*. New York: Oxford University Press.
- Díaz-Saldaña, I., J. López-Domínguez y M. Sabido (2018a). «An Effective Cosmological Constant From an Entropic Formulation of Gravity». En: arXiv: [1806.04918](https://arxiv.org/abs/1806.04918) [gr-qc].
- Díaz-Saldaña, I., J. C. López-Domínguez y M. Sabido (2018b). «On Emergent Gravity, Black Hole Entropy and Galactic Rotation Curves». En: *Phys. Dark Univ.* 22, págs. 147-151. DOI: [10.1016/j.dark.2018.10.006](https://doi.org/10.1016/j.dark.2018.10.006). arXiv: [1802.08533](https://arxiv.org/abs/1802.08533) [gr-qc].
- EHT (2019). «First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole». En: *The Astrophysical Journal Letters* 875.1, 17 pp. URL: <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab0ec7>.
- Hawking, S. W. (1974). «Black hole explosions». En: *Nature* 248, págs. 30-31. DOI: [10.1038/248030a0](https://doi.org/10.1038/248030a0).
- Jacobson, Ted (1995). «Thermodynamics of space-time: The Einstein equation of state». En: *Phys. Rev. Lett.* 75, págs. 1260-1263. DOI: [10.1103/PhysRevLett.75.1260](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.1260). arXiv: [gr-qc/9504004](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9504004) [gr-qc].
- Koyré, Alexandre (1979). *Del mundo cerrado al universo infinito*. siglo XX editores.
- Krasnov, Kirill y Carlo Rovelli (2009). «Black holes in full quantum gravity». En: *Class. Quant. Grav.* 26, pág. 245009. DOI: [10.1088/0264-9381/26/24/245009](https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/24/245009). arXiv: [0905.4916](https://arxiv.org/abs/0905.4916) [gr-qc].
- Modesto, Leonardo y Andrew Randono (2010). «Entropic Corrections to Newton’s Law». En: arXiv: [1003.1998](https://arxiv.org/abs/1003.1998) [hep-th].
- Polchinski, Joseph (1994). «What is string theory?» En: *NATO Advanced Study Institute: Les Houches Summer School, Session 62: Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory Les Houches, France, August 2-September 9, 1994*. arXiv: [hep-th/9411028](https://arxiv.org/abs/hep-th/9411028) [hep-th].
- Romero, Juan M. y J. David Vergara (2003). «The Kepler problem and noncommutativity». En: *Mod. Phys. Lett. A* 18, págs. 1673-1680. DOI: [10.1142/S0217732303011472](https://doi.org/10.1142/S0217732303011472). arXiv: [hep-th/0303064](https://arxiv.org/abs/hep-th/0303064) [hep-th].

- Rooney, Anne (2013). *La historia de la física. De la filosofía natural al enigma de la materia oscura*. México, D.F.: Grupo Editorial Tomo.
- Rovelli, Carlo y Lee Smolin (1995a). «Discreteness of area and volume in quantum gravity». En: *Nucl. Phys.* B442. [Erratum: *Nucl. Phys.* B456,753(1995)], págs. 593-622. DOI: [10.1016/0550-3213\(95\)00150-Q](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00150-Q), [10.1016/0550-3213\(95\)00550-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00550-5). arXiv: [gr-qc/9411005](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9411005) [gr-qc].
- (1995b). «Spin networks and quantum gravity». En: *Phys. Rev. D* 52 (10), págs. 5743-5759. DOI: [10.1103/PhysRevD.52.5743](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.5743). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.5743>.
- Thornton, Stephen T. y Jerry B. Marion (5ta ed.). *CLASSICAL DYNAMICS OF PARTICLES AND SYSTEMS*. USA: THOMPSON, BROOKS/COLE.
- Unruh, W. G. (1976). «Notes on black-hole evaporation». En: *Phys. Rev. D* 14 (4), págs. 870-892. DOI: [10.1103/PhysRevD.14.870](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.14.870). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.14.870>.
- Verlinde, Erik P. (2011). «On the Origin of Gravity and the Laws of Newton». En: *JHEP* 04, pág. 029. DOI: [10.1007/JHEP04\(2011\)029](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2011)029). arXiv: [1001.0785](https://arxiv.org/abs/1001.0785) [hep-th].

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO



León, Guanajuato, a 27 de noviembre de 2019

Dr. DAVID YVES GHISLAIN DELEPINE
DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
P R E S E N T E

Estimado Doctor David Delepine,

Por este medio le informo que he leído y revisado la tesis de licenciatura de la estudiante **Gemma Elizabeth Pérez Cuéllar**. El trabajo se titula: **“Correcciones de gravedad entrópica a las órbitas planetarias”**, y el asesor es el Dr. Oscar Miguel Sabido Moreno.

He constatado que la estudiante posee dominio del tema y que el estudio que realizó es de calidad. Me complace informarle que estoy de acuerdo con que se realice la presentación del trabajo de tesis, puesto que el mismo cuenta con requisitos de sobra para la obtención del grado de Licenciatura en Ingeniería Física.

Reciba mis cordiales saludos,

ATENTAMENTE
“LA VERDAD OS HARÁ LIBRES”

Dra. Nana Geraldine Cabo Bizet

Departamento de Física
Campus León, Universidad de Guanajuato
Loma del Bosque 103, Colonia Lomas del Pedregal
C.P. 37150, León, Guanajuato,
México



Asunto: Revisión de Tesis

León, Gto., a 26 de Noviembre de 2019

**DR. DAVID DELEPINE
DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE
CIENCIAS E INGENIERÍAS
UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
PRESENTE:**

Por medio de la presente quiero responder a la solicitud de revisión del trabajo de tesis titulado "*Correcciones de gravedad entrópica a las órbitas planetarias*", realizado por Gemma Elizabeth Pérez Cuellar.

Debido a fungí como asesor de este trabajo, he revisado la progresión de dicho trabajo. El resultado mas importante fue establecer las cotas para una formulación entrópica de la gravedad. Dichas cotas se obtienen al analizar el corrimiento del perihelio de mercurio. Cabe mencionar que de los resultados obtenidos se esta escribiendo un artículo de investigación.

A mi juicio es un trabajo relevante en el que se estudia los efectos de una nueva formulación de la gravedad. Razón por la cual considero que es del nivel para obtener el grado de Licenciado en Ingeniería Física, y que el trabajo está listo para la defensa pública.

Sin más por el momento

**ATENTAMENTE
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"**

**Dr. Oscar Miguel Sabido Moreno
Profesor Titular B**

C.c.p. Archivo

DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS



León, Gto., a 26 de noviembre de 2019

DR. DAVID DELEPINE
DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
CAMPUS LEÓN
UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
P R E S E N T E

Estimado Dr. Delepine,

En mi calidad de miembro del comité de sinodales de la estudiante de Licenciatura en Ingeniería Física Gemma Elizabeth Pérez Cuéllar, por este medio informo a usted que he revisado su trabajo de tesis titulado "*Correcciones de gravedad entrópica a las órbitas planetarias*" que realizó Gemma con el fin de obtener el grado de Licenciatura en Ingeniería Física.

El trabajo de Gemma Elizabeth posee el contenido y la relevancia necesaria como trabajo de investigación. Considero que su trabajo de tesis está listo para ser defendido públicamente.

Sin más por el momento, me despido con un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"

Dr. José Luis López Picón
Departamento de Física

DIVISION DE CIENCIAS E INGENIERÍAS, CAMPUS LEÓN

Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre C.P. 37150 León, Gto., Ap. Postal E-143 C.P. 37000 Tel. (477) 788-5100
Fax: (477) 788-5100 ext. 8449. Email: jl_lopez@fisica.ugto.mx

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO



León, Guanajuato, a 27 de noviembre de 2019

DR. LEONARDO ÁLVAREZ VALTIERRA
SECRETARIO ACADÉMICO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

Por la presente declaro que la tesis "Correcciones de gravedad entrópica a las órbitas planetarias", escrita por la C. Gemma Elizabeth Pérez Cuéllar, cumple con los criterios de calidad para obtener el título de Licenciada en Física.

ATENTAMENTE
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"



DR. DAVID YVES GHISLAIN DELEPINE
UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
CAMPUS LEÓN
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
SECRETARÍA ACADÉMICA

C.p. Archivo

División de Ciencias e Ingenierías, Campus León
Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre
C.P. 37150, León, Gto., México
www.dci.ugto.mx