

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

TESIS DE MAESTRÍA

Correcciones de Ungravity a las pruebas clásicas de la Relatividad General

Autora:

Gemma Elizabeth Pérez
Cuéllar

Supervisor:

Dr. Oscar Miguel Sabido
Moreno



*Tesis presentada para obtener el título de
Maestría en Física*

en la

División de Ciencias e Ingenierías
UG, Campus León

10 de mayo de 2022

Agradecimientos

Soy muy afortunada y estoy muy agradecida por tener a mi alrededor personas que, de maneras muy diversas, me inspiran, apoyan, enseñan y acompañan en el camino. A todas ellas mi reconocimiento y admiración. Como claramente este espacio no me alcanza para mencionar a cada una de dichas personas ni para detallar mi sentimiento de gratitud hacia ellas, intenté sintetizarlo en los párrafos siguientes:

Mis padres han sido mi principal apoyo y motivación, pues siempre han dado su mayor esfuerzo para que mis hermanos y yo tengamos las condiciones y herramientas necesarias para desarrollar nuestros intereses y perseguir nuestros objetivos. A mis hermanos Paco, Diana y Oscar, les agradezco el acompañamiento de vida, así como las enseñanzas y experiencias que han surgido de nuestra convivencia; con cada uno de ustedes comparto algo especial que me inspira y que ha caracterizado mi formación personal. También agradezco a Emiliano por enseñarme cosas tan profundas a través de sus acciones cotidianas y por darme alegría y paz. A mi familia extensa y mis amigos, quienes han estado para animarme y escucharme, con quienes he crecido en el ámbito tanto personal como escolar.

Con mi asesor, el Dr. Miguel Sabido, estoy agradecida por el impacto que ha tenido en mi formación académica a través de su conocimiento, su guía, su experiencia y su amistad. En ese sentido, también externo un reconocimiento a las profesoras y profesores que a lo largo de los últimos años han abonado a mi formación académica.

En los últimos dos años, la maestría de tiempo completo se desarrolló a distancia; a pesar de ello, mis compañeros de maestría me brindaron su apoyo en tiempos de incertidumbre; les agradezco sinceramente y les deseo el mejor de los éxitos en sus carreras académicas.

Durante la realización de este trabajo de tesis, los miembros de mi Comité de Seguimiento Académico revisaron y dieron recomendaciones a mi trabajo, de la misma forma que lo hicieron como sinodales; agradezco su tiempo y sus atenciones: Dr. Carlos Vaquera, Dr. José Luis Picón y Dr. Isaac Díaz Saldaña.

Finalmente, agradezco el financiamiento de manutención que me fue proporcionado mediante el CONACyT, durante los dos años de maestría.

Índice general

Agradecimientos	I
1. Introducción	1
2. Solución de Schwarzschild y modificaciones	9
2.1. Relatividad General	9
2.2. Solución de Schwarzschild en Relatividad General	10
2.3. Solución esféricamente simétrica modificada	14
2.4. Métrica de Schwarzschild con corrección de Ungravity	15
2.5. Constante cosmológica efectiva	17
3. Pruebas clásicas de la Relatividad General (RG)	19
3.1. Precesión del Perihelio de Mercurio	19
3.2. Curvatura de la luz	24
3.3. Corrimiento al rojo gravitacional	27
4. Pruebas clásicas de RG a partir de ecuaciones clásicas, con correcciones de Ungravity	31
4.1. Órbitas planetarias a partir de un potencial modificado	31
4.1.1. Caso $d_u = \frac{3}{2}$	34
4.1.2. Caso $d_u = 2$	37
4.1.3. Caso $d_u = 3$	38
4.1.4. Caso $d_u = 4$	39
4.1.5. Sumario y análisis	40
4.2. Órbitas planetarias a partir de fuerza Newtoniana entrópica y modificada	41
4.2.1. Caso $d_u = \frac{3}{2}$	43
4.2.2. Caso $d_u = 2$	45
4.2.3. Caso $d_u = 3$	46
4.2.4. Caso $d_u = 4$	47
4.2.5. Sumario y análisis	48
4.3. Redshift gravitacional a partir de ecuaciones clásicas modificadas	50
4.3.1. Resultados	54
5. Pruebas clásicas de RG a partir de una métrica con modificaciones de Ungravity	55
5.1. Métrica modificada	55
5.2. Precesión del perihelio de Mercurio a partir de métrica modificada	58
5.2.1. Caso $d_u = \frac{3}{2}$	60
5.2.2. Caso $d_u = 2$	61
5.2.3. Caso $d_u = 3$	62
5.2.4. Caso $d_u = 4$	63
5.2.5. Sumario	65

5.3. Deflexión de la luz a partir de métrica modificada	65
5.3.1. Caso $d_u = \frac{3}{2}$	68
5.3.2. Caso $d_u = 2$	70
5.3.3. Caso $d_u = 3$	71
5.3.4. Caso $d_u = 4$	72
5.3.5. Resultados	74
5.4. Corrimiento al rojo gravitacional a partir de métrica modificada	75
5.5. Comparaciones	78
6. Conclusiones	82
Bibliografía	83

Índice de figuras

1.1. Representación de las partículas fundamentales descritas por el Modelo Estándar, ordenadas de acuerdo a sus características principales (Tomé, 2014).	3
1.2. Secciones cónicas en función de la excentricidad e (ϵ en la notación de la figura) (Thornton y Marion, 5ta ed.).	5
2.1. Espacio de parámetros para una constante cosmológica efectiva, a partir de la ecuación de Friedmann modificada.	18
3.1. Precesión del perihelio de una órbita elíptica (d’Inverno, 1998).	19
3.2. Trayectoria de un rayo de luz en el espacio plano (d’Inverno, 1998).	25
3.3. Trayectorias asintóticas de la luz procedente de una estrella en presencia del campo gravitacional del Sol (d’Inverno, 1998).	26
3.4. Espectro electromagnético (luisyep, 2020).	28
3.5. Sistema ideal de emisión y absorción (d’Inverno, 1998)	28
4.1. Espacio de parámetros con cotas para la precesión del perihelio de Mercurio a partir de un potencial Newtoniano modificado.	41
4.2. Espacio de parámetros con cotas para la precesión del perihelio de Mercurio a partir de una fuerza Newtoniana de origen entrópico, con modificaciones de Ungravity.	49
4.3. Espacio de parámetros con cotas para el experimento Pound-Rebka, a partir de un potencial Newtoniano modificado	52
4.4. Espacio de parámetros con cotas para el experimento Pound-Rebka, a partir de una fuerza entrópica Newtoniana modificada.	54
5.1. Espacio de parámetros con cotas para la precesión del perihelio de Mercurio, a partir de una métrica de Schwarzschild modificada.	65
5.2. Trayectoria de los rayos de luz real y aparente, en presencia de una distribución de masa esférica.	68
5.3. Espacio de parámetros con cotas para deflexión de luz, a partir en una métrica de Schwarzschild modificada, para estrellas que aparecen cercanas al sol, debido al campo gravitacional de éste.	75
5.4. Espacio de parámetros con cotas dadas por el experimento Pound-Rebka a la ecuación modificada de corrimiento al rojo gravitacional, obtenida a partir de una métrica de Schwarzschild modificada.	78
5.5. Comparación entre los espacios de parámetros obtenidos con las cotas para la precesión del perihelio de Mercurio y para la desviación a la ley de inverso cuadrado, a partir de un potencial Newtoniano modificado.	78

5.6.	Comparación entre los espacios de parámetros para cotas obtenidas de la precesión de la órbita de Mercurio, a partir de un potencial Newtoniano modificado, una fuerza Newtoniana entrópica modificada y una métrica de Schwarzschild modificada. Se muestran $d_u = \frac{3}{2}$ y $d_u = 2$	79
5.7.	Comparación entre los espacios de parámetros para cotas obtenidas de la precesión de la órbita de Mercurio, a partir de un potencial Newtoniano modificado, una fuerza Newtoniana entrópica modificada y una métrica de Schwarzschild modificada. Se muestran $d_u = 3$ y $d_u = 4$	79
5.8.	Comparación entre las cotas obtenidas para el corrimiento al rojo gravitacional, a partir de distintas ecuaciones con correcciones de Ungravity. Se muestran los casos $d_u = \frac{3}{2}$ y $d_u = 2$	80
5.9.	Comparación entre las cotas obtenidas para el corrimiento al rojo gravitacional, a partir de distintas ecuaciones con correcciones de Ungravity. Se muestran los casos $d_u = 3$ y $d_u = 4$	80
5.10.	Comparación de espacios de parámetros con cotas de entre los cinco modelos para $d_u = \frac{3}{2}$ y $d_u = 2$.	81
5.11.	Comparación entre los cinco modelos para $d_u = 3$ y $d_u = 4$.	81

Capítulo 1

Introducción

Uno de los propósitos más básicos de la ciencia es el de construir modelos cuyos resultados representen de manera consistente lo que se observa en la naturaleza. Existen trabajos muy diversos, que estudian fenómenos diversos y que, a su vez, emplean distintos enfoques, propuestas y métodos. A menudo estos trabajos comparten características entre sí. La motivación de este trabajo de tesis está relacionada con el acercamiento a modelos alternativos de las interacciones fundamentales de la naturaleza, propuestos con el fin de empatar sus descripciones con las de fenómenos cuyos detalles permanecen sin una descripción satisfactoria.

En ese sentido, consideremos, como ejemplo, dos de los fenómenos cuya descripción ha motivado múltiples esfuerzos y modelos desde hace varias décadas: El movimiento de las galaxias (Rubin y Ford Jr, 1970) y la expansión del universo (Riess y col., 1998). Como causa de estos fenómenos se han propuesto los componentes denominados Materia Oscura (Swart, Bertone y Dongen, 2017) y Energía Oscura (Peebles y Ratra, 2003), respectivamente. Propuestas que implican la gran tarea de modelar estos nuevos componentes y hacer esta descripción consistente con las teorías actualmente utilizadas, aceptadas principalmente por sus resultados experimentales. La descripción de fenómenos nuevos, como éstos, así como las preguntas que surgen en consecuencia de las mismas teorías, empujan a la búsqueda de alternativas y visibilizan sus inconsistencias o la falta de “piezas” en ellas.

Antes de mirar hacia las alternativas conviene repasar la forma en que se han descrito con éxito distintos fenómenos en el pasado, la naturaleza o características de dichos fenómenos y, por su puesto, las observaciones que nos permiten reconocerlos. Actualmente las teorías se inclinan por la idea de que existen cuatro maneras distintas en que la materia interactúa. Los fenómenos que estas cuatro interacciones fundamentales describen van desde la constitución de la materia misma hasta las situaciones físicas más comunes de nuestro entorno cotidiano. La relevancia de la interacción para cada fenómeno depende, en parte, de la escala del sistema a describir, ya sea al interior de un átomo o alrededor de un grupo de galaxias.

Las cuatro interacciones fundamentales son: La Débil, Fuerte, Electromagnética y Gravitacional, cuyo alcance e intensidad se describe a continuación

Interacción	Intensidad relativa	Alcance (m)	Partícula
Fuerte	10^{38}	10^{-15}	Gluón
Débil	10^{25}	10^{-18}	Bosones W y Z
Electromagnética	10^{36}	$\rightarrow \infty$	Fotón
Gravitacional	1	$\rightarrow \infty$	Gravitón

CUADRO 1.1: Características de las interacciones fundamentales

Como puede observarse, las fuerzas fuerte y débil predominan en las escalas atómica y subatómica, respectivamente. La fuerza fuerte representa, a grandes rasgos, la interacción que permite la conformación de los núcleos atómicos. Por otro lado, mediante la fuerza débil se explican y calculan los decaimientos de partículas o núcleos, fenómeno a través del cual dichas partículas o núcleos se transforman, liberando energía. Con un alcance mucho mayor, en cuanto a distancia, las fuerzas electromagnética y gravitacional representan las interacciones que resultan más familiares a partir de nuestra experiencia. La interacción electromagnética explica los fenómenos que involucran cuerpos con carga eléctrica y la interacción gravitacional aquellos que involucran cuerpos masivos. Como puede verse en la última columna del cuadro 1.1, cada una de las interacciones se caracteriza por ser resultado del intercambio de una partícula específica. Como ejemplo, la interacción electromagnética surge del intercambio de fotones entre partículas cargadas. En esta descripción, se considera al gravitón como la partícula a ser intercambiada entre partículas con masa, que genera la interacción gravitacional. Cabe mencionar que, al día de hoy, dicha partícula no ha sido observada de manera directa. (Salam, 1980)

Desde hace algunas décadas, uno de los modelos más exitosos de la física ha sido construido a partir de la perspectiva de la Mecánica Cuántica. El Modelo Estándar, es una Teoría Cuántica de Campos conformada por un conjunto de teorías que describen la materia y sus interacciones. Las descripciones incluyen tres de las cuatro interacciones fundamentales: La fuerza fuerte, descrita por la Cromodinámica Cuántica y las fuerzas Electromagnética y Débil, descritas por la Teoría Electrodébil. A través de este modelo se han podido calcular las características experimentales, principalmente en cuanto a energía, necesarias para comprobar, ya sea de forma directa o indirecta, la existencia de las distintas partículas del modelo, cuyas características se resumen a continuación.

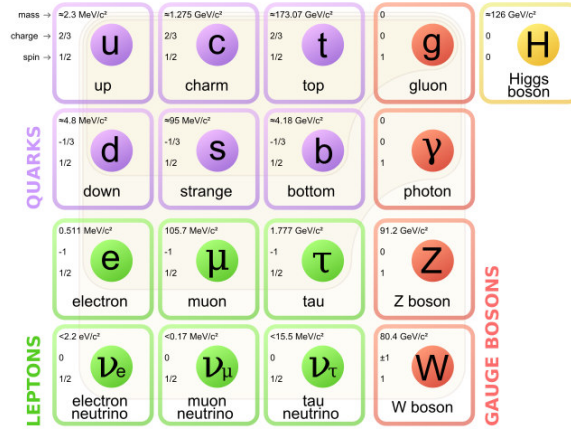


FIGURA 1.1: Representación de las partículas fundamentales descritas por el Modelo Estándar, ordenadas de acuerdo a sus características principales (Tomé, 2014).

Las partículas incluidas en este modelo se encuentran caracterizadas por su masa, adquirida mediante el mecanismo de Higgs, su carga eléctrica y su número cuántico de espín. A su vez, están agrupadas de acuerdo al tipo de partícula, en quarks, leptones y bosones de norma (Novaes, S. F., 2000).

Por otro lado, la interacción gravitacional está descrita por la teoría de la Relatividad General (RG) (Einstein, 1916), que a diferencia del Modelo Estándar, se basa en una descripción geométrica del espacio tiempo. Escrita en un formalismo de tensores, la Relatividad General relaciona a la materia contenida en el espacio con la forma o curvatura de éste. Al igual que el Modelo Estándar, esta teoría ha tenido resultados exitosos a lo largo de más de un siglo desde su publicación. Algunos de sus primeros éxitos, relacionados con fenómenos no descritos por la Mecánica Clásica, y denominados Pruebas Clásicas de la Relatividad General, se desarrollan posteriormente en este trabajo.

Las pruebas clásicas de la relatividad general se consolidaron como resultados importantes para la validación de la entonces nueva teoría, pues permitieron comprobar que la Relatividad General cumple con el principio de correspondencia. Cualquier nueva propuesta en la explicación de un fenómeno debe ser consistente con las teorías previamente aceptadas, es decir, ninguna de sus consideraciones debe contradecir o anular los axiomas ni características de la o las otras teorías. Al comparar entre los modelos propuestos y las teorías aceptadas, es importante hacerlo en la misma escala, tomando un rango de validez común. En el caso de la Relatividad General, al considerar velocidades pequeñas en comparación con la velocidad de la luz y campos gravitacionales débiles, el rango de validez coincide con el de la Gravitación Universal Newtoniana, teoría utilizada en el momento en que RG fue propuesta (d’Inverno, 1998).

En el siglo XVII, Isaac Newton describe a la gravedad con una ecuación de inverso cuadrado, denominada Ley de Gravitación Universal, que denota la interacción gravitacional entre dos partículas con masas m_1 y m_2 , separadas por una distancia r ,

$$\mathbf{F} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = -\nabla\Phi, \quad (1.1)$$

donde Φ es el potencial gravitacional Newtoniano y G es la constante de gravitación universal, $G = 6.6743 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$. Esta descripción está basada en la Mecánica Clásica Newtoniana, es decir, tiene como axiomas las tres leyes de Newton y está escrita originalmente en un formalismo de ecuaciones diferenciales, que representan las Ecuaciones de Movimiento del sistema. Es útil para calcular las trayectorias y velocidades de los cuerpos involucrados en fenómenos de nuestro entorno cotidiano, con bajas velocidades (en comparación con la velocidad de la luz) y campos gravitacionales de poca intensidad.

Otras formulaciones útiles e importantes de la Mecánica Clásica se basan en la descripción de la energía del sistema. Los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano son ejemplos de ello. En estas formulaciones, la información acerca de la dinámica de un sistema queda determinada por un funcional y las ecuaciones de movimiento pueden obtenerse utilizando el principio de mínima acción, el cual establece que la trayectoria seguida por un sistema es un extremo de la denominada acción, S , definida como

$$S = \int_{t_0}^{t_i} L(q, \dot{q}) dt, \quad (1.2)$$

donde L es el funcional y q_i las coordenadas generalizadas que caracterizan al sistema; $\dot{q}_i$ indica la derivada de q con respecto del tiempo. En este formalismo, las Ecuaciones de Movimiento pueden encontrarse a partir de dicho funcional, mediante las Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \quad (1.3)$$

En el formalismo Hamiltoniano, las ecuaciones de movimiento están dadas por las denominadas Ecuaciones de Hamilton,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{y} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (1.4)$$

donde H es el funcional Hamiltoniano, q_i las coordenadas generalizadas y p_i los momentos generalizados, definidos por la relación

$$p_i = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}.$$

Para ambos formalismos, las ecuaciones de movimiento son equivalentes a las obtenidas en la teoría de Newton.

En esta teoría clásica, y utilizando las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana, pueden obtenerse las Leyes de Kepler, mediante las cuales se puede calcular, entre otras cosas, el comportamiento de los cuerpos de un sistema planetario. Dichas leyes pueden obtenerse al resolver el problema de dos cuerpos, el cual considera dos objetos masivos sometidos a un potencial central, es decir, de la forma $1/r$. Al analizar el problema en el formalismo Lagrangiano, resulta evidente la conservación del momento angular del sistema, siendo ésta una de sus características esenciales. Además, en el formalismo Hamiltoniano, puede relacionarse fácilmente la energía del sistema con el radio de las órbitas. Así, la ecuación diferencial que resulta del de

este sistema es (Thornton y Marion, 5ta ed.)

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{\alpha}, \quad (1.5)$$

donde $u = 1/r$. Tiene como solución a la ecuación de movimiento

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + e \cos \phi. \quad (1.6)$$

Esta expresión, denominada Ecuación de secciones cónicas, describe distintas curvas como la elipse, hipérbola, parábola o circunferencia, con el foco en el origen, dependiendo de los parámetros físicos del sistema, representados por las variables

$$\alpha \equiv \frac{l^2}{\mu k}, \quad e \equiv \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}, \quad (1.7)$$

donde l es el momento angular, E la energía, k es una constante relacionada con el potencial central y μ la masa reducida del sistema. A su vez, las variables α y e representan variables geométricas de la órbita. La excentricidad e denota el grado de diferencia de la curva respecto de una circunferencia. Por ejemplo, la excentricidad de una circunferencia es claramente $e = 0$, mientras que la excentricidad de una elipse puede ser $e = 0.2$. Es decir que la elipse tiene un grado de diferencia de 0.2 respecto de una circunferencia, lo cual puede visualizarse en el achatamiento de sus polos. Por otro lado, α es el parámetro geométrico *latus rectum*, definido como la cuerda que pasa por uno de los focos de la curva y es paralela a su directriz.

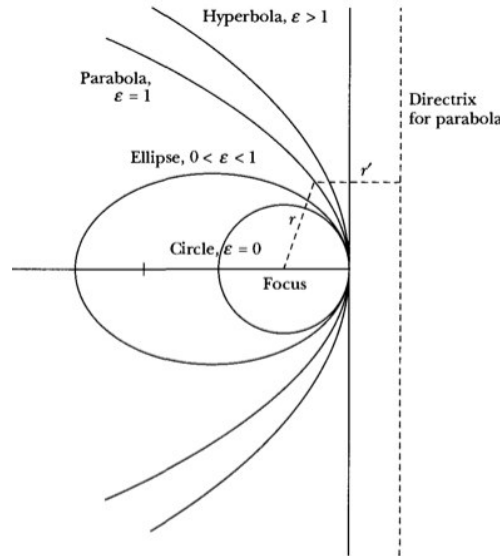


FIGURA 1.2: Secciones cónicas en función de la excentricidad e (e en la notación de la figura) (Thornton y Marion, 5ta ed.).

Como se mencionó anteriormente, a través de un análisis en el formalismo Lagrangiano y luego en el formalismo Hamiltoniano, pueden verificarse las leyes establecidas de manera empírica por Johannes Kepler, en 1609. Las tres leyes de Kepler pueden ser expresadas de la siguiente forma:

1. Los planetas se mueven en órbitas elípticas con el sol en uno de sus focos.

2. En una órbita, el radio que va del sol al planeta barre un área constante por unidad de tiempo. Dicho de otro modo, el radio de la órbita barre áreas iguales en tiempos iguales.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu}. \quad (1.8)$$

3. El cuadrado del período de un planeta, τ , es proporcional al cubo del semieje mayor a

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2\mu}{Gm_1m_2}a^3. \quad (1.9)$$

Como se mencionó anteriormente, existen fenómenos en la escala planetaria que no encuentran descripción utilizando las leyes de Kepler. A partir de esta escala otras consideraciones son necesarias debido, principalmente, a la velocidad del sistema y a la intensidad de los campos gravitacionales. En estos casos la descripción de Relatividad General es la adecuada, al ser una teoría de gravedad construida a partir de una mecánica relativista: La teoría de Relatividad Especial (Einstein y col., 1905). Ésta puede construirse a partir de dos principios. El primero implica la validez de las leyes de la física en cualquier sistema de referencia. Para ello se establece que dichas expresiones deben ser invariantes bajo transformaciones espacio-temporales. El segundo establece la velocidad de la luz como constante y como velocidad máxima a la que puede propagarse la información en el vacío.

Estos principios implican dejar de considerar al tiempo como un absoluto y considerarlo como una coordenada más, de modo que la posición de un sistema en el espacio tiempo queda descrita por las coordenadas (ct, x, y, z) o x^a , donde a va de 0 a 3. Los cambios de marco de referencia se llevan a cabo mediante las transformaciones de Lorentz, cuyas expresiones incluyen combinaciones lineales de las coordenadas espaciales con la temporal. Así, al ser las leyes físicas invariantes bajo estas transformaciones, queda explícito que el tiempo y el espacio dejan de tratarse como absolutos y por separado, como sucede en la mecánica Newtoniana, para tratarse como un espacio-tiempo de tres coordenadas espaciales y una coordenada temporal. Más detalles sobre la teoría de la Relatividad General se incluyen en el capítulo 2.

Esta teoría ha probado ser exitosa en la descripción de distintos fenómenos observados en la naturaleza y cuenta con predicciones de fenómenos nuevos, comprobados posteriormente de manera experimental. Ejemplos de ello son las ondas gravitacionales y la existencia de agujeros negros. Propuestos hace más de un siglo, fueron observados en 2015 y 2019, por las colaboraciones LIGO (Abbott y col., 2016) y EHT (EHT, 2019), respectivamente. Sin embargo, ciertas preguntas que surgen naturalmente de la teoría carecen de respuesta en esta descripción, tales como, ¿qué sucede al interior de un agujero negro? Por otro lado, fenómenos como la existencia de Materia Oscura y Energía Oscura, mencionadas en párrafos anteriores, carecen también de una teoría que los describa de manera satisfactoria.

Lo que se observa directamente es, por ejemplo, que las curvas de rotación de galaxias corresponden a las de cuerpos con más masa de la que se mide, lo que permite pensar en un componente extra de materia que contribuya en el comportamiento de los cuerpos masivos en el espacio-tiempo, es decir, que interactúe de forma gravitacional. Así, esencialmente, la materia oscura como componente de los sistemas

gravitacionales aparece como el complemento para que el comportamiento de dichos sistemas concuerde con el observado. A su vez, la observación sistemática de la distancia entre puntos del espacio-tiempo, sugiere su expansión a una velocidad cada vez mayor. Para empatar con las observaciones, el componente que proporciona la energía necesaria para una expansión de este tipo es la denominada Energía Oscura.

De las propuestas anteriores surgen preguntas relacionadas con la naturaleza de estas componentes desconocidas. Las partículas que las conforman y la forma de su interacción con las partículas del Modelo Estándar, así como los mecanismos que producen estos fenómenos en el marco de la Relatividad General, son aún desconocidos. No obstante, existen numerosas propuestas, nuevas teorías o modificaciones de las teorías existentes, que además de buscar solucionar los problemas actuales en la descripción de lo que observamos en el universo, pretenden explorar los límites de las teorías existentes, buscando una mejor comprensión de lo que las observaciones significan en cada una de ellas. En este trabajo se considera, en particular, un modelo de partículas con propiedades peculiares, propuesto como un sector “escondido” del Modelo Estándar, así como las modificaciones que éste genera en las interacciones gravitacionales en el límite clásico.

El modelo de Unparticles se ha propuesto como un sector invariante de escala del Modelo Estándar (Georgi, 2007). Generalmente, las teorías cuánticas de campos no son invariantes de escala. Esta característica, relacionada al comportamiento de la teoría bajo dilataciones en las coordenadas, implica la descripción de partículas sin masa definida. Las partículas de este sector, denominadas unparticles (no partículas) tienen espectros de masa continuos.

Si las partículas de este sector existen, podrían interactuar con las partículas del Modelo Estándar debajo de cierta escala de energía Λ_u , lo que convierte esta descripción en una teoría efectiva. Debajo de esta energía crítica, las partículas del Modelo Estándar, caracterizadas por la escala de masa de Planck, M_p , interactuarían mediante el intercambio de unparticles, caracterizadas por la escala de masa M_u . Además, el parámetro d_u indica la dimensión de los operadores que, debajo de la escala Λ_u , se convierten en los operadores de Unparticles.

Todos los parámetros mencionados en el párrafo anterior, salvo la masa de Planck, son parámetros libres del modelo de Unparticles. Fijarlos implica una descripción completa del modelo. Particularmente, conocer la escala de energía Λ_u se relaciona directamente con las especificaciones experimentales para observar las interacciones en cuestión y, de ser factible, comprobar o descartar el modelo. Otra forma de descartarlo o darle solidez es aplicar el modelo a fenómenos conocidos, de modo que los parámetros libres puedan cotejarse con las observaciones y revisar la consistencia en el orden de magnitud resultante.

En este trabajo se considera el sector de gravedad de Unparticles, denominado Ungravity. El objetivo es estudiar los fenómenos conocidos como pruebas clásicas de la Relatividad General; precesión de las órbitas planetarias, deflexión de la luz y corrimiento al rojo gravitacional; utilizando distintas ecuaciones con modificaciones de Ungravity obtenidas de la literatura. Particularmente se consideran las siguientes:

- Una ecuación para el potencial gravitacional modificado (Goldberg y Nath, 2008).
- Una fuerza entrópica Newtoniana, con contribuciones de Ungravity (Nicolini, 2010).
- Una métrica de Schwarzschild modificada (Gaete, Helayél-Neto y Spallucci, 2010).

Las ecuaciones diferenciales obtenidas en cada caso se resuelven para los valores fijos del parámetro $d_u = \frac{3}{2}, 2, 3$ y 4. Conociendo las cotas experimentales para los fenómenos en cuestión, en el caso sin correcciones, se obtienen cotas para el parámetro R_G , y con ello se visualizan los espacios de parámetros para la escala de energía Λ_u al variar la masa característica M_u , mediante la relación

$$\Lambda_u = \frac{1}{\pi R_G} \left(\frac{M_p}{M_u} \right)^{1/(d_u-1)} \times \left(\frac{2}{\pi} \frac{\Gamma(d_u + \frac{1}{2})\Gamma(d_u - \frac{1}{2})}{\Gamma(2d_u)} \right)^{1/(2d_u-2)}. \quad (1.10)$$

Se consideran masas en el intervalo $10^3 \text{ GeV} \leq M_u \leq 10^{25} \text{ GeV}$. Al utilizar el sistema de unidades naturales, $c = 1$ y $\hbar = 1$, la masa de Planck tiene el valor $M_p = 2.4 \times 10^{18} \text{ GeV}$. Otra consideración se refiere a los valores permitidos para R_G , ya que al presentarse como una cota superior, los valores para la energía característica representan cotas inferiores, dada la ecuación (1.10), lo cual implica que la región válida para la Λ_u es la que se encuentra por encima de las rectas representadas en las gráficas de cada capítulo. Finalmente, los resultados son comparados entre sí y con otros resultados tomados de la literatura.

El trabajo se distribuye como se menciona a continuación: El capítulo 2 incluye la obtención de la solución de Schwarzschild y una modificación proveniente de Ungravity, así como el espacio de parámetros para una constante cosmológica efectiva, tomada de los resultados en Díaz-Saldaña, López-Domínguez y Sabido, 2020. En el capítulo 3 se desarrollan de manera breve las pruebas clásicas de la Relatividad General, siguiendo la notación de d’Inverno, 1998. El capítulo 4 consta de la obtención de las cotas para los parámetros del modelo de Unparticles, a través de la precesión del perihelio de Mercurio y el corrimiento al rojo gravitacional. Ello a partir de ecuaciones modificadas, en el límite de campo débil (en este capítulo no se incluye el fenómeno de deflexión de la luz, pues como puede verse en el capítulo 3, este efecto no se observa a primer orden). En el capítulo 5 se desarrollan las tres pruebas clásicas de RG para obtener las cotas sobre los parámetros de Unparticles, utilizando una métrica de Schwarzschild modificada. El último capítulo está dedicado a las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Solución de Schwarzschild y modificaciones

2.1. Relatividad General

Escrita en un formalismo de tensores, la Relatividad General proporciona una descripción geométrica del espacio-tiempo (d'Inverno, 1998), su curvatura está determinada por la materia que contiene y, a su vez, la dinámica de la materia está determinada por la curvatura del espacio-tiempo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

En la anterior, denominada ecuación de campo de Einstein, el lado izquierdo está relacionado con la curvatura del espacio-tiempo y el lado derecho con la materia. Usualmente se identifica la materia contenida en el sistema, denotada por el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ y se resuelve la ecuación anterior para encontrar el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, el cual contiene toda la información sobre la geometría del espacio-tiempo; para ello deben resolverse diez ecuaciones no lineales. $R_{\mu\nu}$ y R , denominados tensor de Ricci y escalar de Ricci, respectivamente; contienen esencialmente segundas derivadas de la métrica. En la segunda igualdad, el término $G_{\mu\nu}$ se conoce como tensor de Einstein. Finalmente, el término del lado izquierdo, Λ , es la denominada constante cosmológica, añadida históricamente por Einstein como una condición de frontera. Se asume que esta constante tiene un valor numérico pequeño, por lo que tendría relevancia únicamente a escalas cosmológicas.

Al igual que en la formulación Lagrangiana de la teoría Newtoniana, las ecuaciones de campo de RG (2.1) se pueden obtener usando el principio de acción extremal, $\delta S = 0$, para la denominada acción de Einstein-Hilbert

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (2.2)$$

donde g es el determinante de la métrica. Para describir otros campos de materia, se pueden agregar términos de la forma

$$S_M = \int \mathcal{L}_M d^4x.$$

Conocer g_{ab} permite definir las distancias entre los distintos puntos del espacio-tiempo. Para una métrica determinada, existen curvas especiales denominadas geodésicas, que minimizan la distancia entre dos puntos de un espacio curvo, siendo la extensión de la noción de línea recta en espacios planos. Dichas curvas son solución

a la ecuación de geodésicas

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} = 0, \quad (2.3)$$

que puede visualizarse como la segunda derivada de una curva en el punto x^a , respecto del parámetro afín τ . El símbolo de Christoffel, Γ_{bc}^a , es parte de la definición de la derivada de un tensor. Por otro lado, el tensor métrico permite comparar Relatividad General con la teoría clásica. Para un sistema con simetría esférica y una partícula de prueba, la aproximación a un espacio plano y una velocidad pequeña respecto de c , cumple

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2}, \quad (2.4)$$

conocido como límite de campo débil. Esta ecuación es equivalente a la ecuación de Poisson utilizada en gravedad Newtoniana.

2.2. Solución de Schwarzschild en Relatividad General

Como solución a las ecuaciones de Einstein, la métrica de Schwarzschild describe el espacio tiempo vacío, en presencia de un campo gravitacional con simetría esférica cuya fuente se considera estática. Al estudiar campos estáticos puede demostrarse (d'Inverno, 1998) que existe un sistema de coordenadas en el que la métrica no depende explícitamente del tiempo y que los términos cruzados de la coordenada temporal con las espaciales son nulos ($g_{0\alpha} = 0$). Además, se encuentra que la variedad¹ puede dividirse en secciones de tiempo constante. Por otro lado, los campos de Killing, siendo aquellos que dejan invariante a la métrica, sirven para establecer la simetría. Para la simetría esférica, el espacio tiempo se define como aquel que admite tres campos de Killing linealmente independientes. Existe un sistema de coordenadas x^a en el que el campo asociado a la coordenada temporal se anula y los asociados a las coordenadas espaciales tienen 3 transformaciones, donde cada una representa una rotación espacial.

Para una sección de tiempo constante con el sistema de coordenadas x^a , se considera un punto P a una distancia constante a del origen. En un espacio tiempo con las características mencionadas anteriormente, las transformaciones (rotaciones espaciales) de la métrica permiten describir al punto P sobre una 2-esfera, si los ángulos de rotación están comprendidos en los intervalos $(0 \leq \theta \leq \pi)$ y $(-\pi \leq \phi \leq \pi)$. Entonces, la distancia infinitesimal entre los puntos del espacio es

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.5)$$

con $r = a$. Debido a que la métrica es invariante ante las transformaciones sobre esta esfera, equivalentes a las transformaciones $(\theta \rightarrow \theta' = \pi - \theta)$ y $(\phi \rightarrow \phi' = -\phi)$, quedan excluidos los términos de la forma $d\theta d\phi$.

Ahora, se propone un elemento de línea esféricamente simétrico, cuya forma será determinada a partir de distintas restricciones para escribir el elemento de línea de

¹Entiéndase una variedad como el espacio n-dimensional que localmente (en secciones pequeñas) se parece a $\mathbb{R}^n$. Si la variedad es diferenciable, las nociones de cálculo diferencial se cumplen localmente. Es en cada punto de estas variedades donde se definen los tensores.

Schwarzschild. Se trabaja en el sistema de coordenadas

$$(x^a) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi),$$

donde el cual el elemento de línea tiene la forma

$$ds^2 = A dt^2 - 2B dt dr - C dr^2 - D(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

siendo A, B, C y D , funciones de r y t , los elementos a determinar.

Primero, se introduce la transformación a la coordenada radial $r \rightarrow r' = D^{\frac{1}{2}}$, entonces $r'^2 = D$. Bajo esta transformación el elemento de línea toma la forma

$$ds^2 = A'(t, r') dt^2 - 2B'(t, r') dt dr' - C'(t, r') dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.6)$$

Por otro lado, observando que los diferenciales de la forma $A'(t, r') dt - B'(t, r') dr'$ pueden multiplicarse por un factor de integración $I(t, r)$ que forma una diferencial exacta, puede escribirse la transformación de la coordenada temporal

$$dt' = I(r', t) [A'(t, r') dt - B'(t, r') dr'],$$

por lo tanto

$$dt'^2 = I^2 [A'^2 dt^2 + B'^2 dr'^2 - 2A'B' dt dr'],$$

que puede reescribirse como

$$A' dt^2 - 2B' dt dr' = I^{-2} A'^{-1} dt'^2 - A'^{-1} B'^2 dr'^2, \quad (2.7)$$

al dejar del lado izquierdo de la ecuación los términos que involucran la coordenada temporal sin transformar. Sustituyendo el lado derecho de la igualdad anterior en (2.6), se tiene

$$\begin{aligned} ds^2 &= I^{-2} A'^{-1} dt'^2 - A'^{-1} B'^2 dr'^2 - C' dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \\ &= I^{-2} A'^{-1} dt'^2 - (A'^{-1} B'^2 + C') dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned}$$

Luego, se definen las funciones exponenciales de ν y λ

$$\begin{aligned} e^\nu &= A'^{-1} I^{-2}, \\ e^\lambda &= C' + A'^{-1} B'^2, \end{aligned}$$

lo cual garantiza que sean términos positivos y, por lo tanto, preserva la signatura del elemento de línea. Con estas definiciones, el elemento de línea (2.6) se reescribe como

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.8)$$

donde ν y λ son funciones de t y r .

Para este elemento de línea, la métrica en su forma covariante es

$$g_{ab} = \text{diag}(e^\nu, -e^\lambda, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta). \quad (2.9)$$

Las componentes del tensor de Einstein mixto, distintas de cero, para la métrica anterior, donde las derivadas con respecto de t se denotan por $\dot{}$ y las derivadas

respecto de r como λ' , son

$$G_0^0 = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right), \quad (2.10)$$

$$G_0^1 = -e^{-\lambda} r^{-1} \dot{\lambda} = -e^{\lambda-\nu} G_1^0, \quad (2.11)$$

$$G_1^1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right), \quad (2.12)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = \frac{e^{-\lambda}}{2} \left(\frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'^2}{2} - \nu'' \right) + \frac{e^{-\nu}}{2} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} \right). \quad (2.13)$$

Ahora, considérese el caso en que el tensor de Einstein es nulo. Puede comprobarse, mediante la identidad de Bianchi $\nabla_\nu G_\nu^\mu = 0$, que al anularse las ecuaciones (2.10), (2.11) y (2.12), se anula la componente G_3^3 . Ello implica que las ecuaciones linealmente independientes son las correspondientes a G_0^0 , G_0^1 y G_1^1 . Al igualarlas a cero, se tiene

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0, \quad (2.14)$$

$$\dot{\lambda} = 0, \quad (2.15)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0, \quad (2.16)$$

respectivamente, que es el sistema de ecuaciones a resolver.

Sumando las ecuaciones (2.14) y (2.16), se sigue que

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right),$$

entonces

$$\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} = \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}, \quad (2.17)$$

por lo tanto

$$\lambda' + \nu' = 0. \quad (2.18)$$

Al integrar la relación anterior

$$\lambda + \nu = h(t), \quad (2.19)$$

donde $h(t)$ puede ser una función arbitraria del tiempo.

Luego, para obtener la función de la coordenada radial, se considera la ecuación (2.16), la cual implica que λ es función únicamente de r . Nótese, en consecuencia, que (2.14) es una ecuación diferencial ordinaria, que puede reescribirse como

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) = -\frac{1}{r^2},$$

entonces

$$e^{-\lambda} - r e^{-\lambda} \lambda' = 1.$$

En términos de una derivada total

$$(r e^{-\lambda})' = 1,$$

y al integrar

$$r e^{-\lambda} = r + c,$$

donde c es una constante arbitraria. Al fijar la constante $c = -2m$

$$re^{-\lambda} = r - 2m, \quad (2.20)$$

entonces

$$e^{\lambda} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \quad (2.21)$$

Hasta ahora, utilizando la ecuación anterior junto con (2.19), se puede escribir la métrica (2.9) como

$$\begin{aligned} g_{ab} &= \text{diag} \left[e^{-\lambda+h(t)}, -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta \right], \\ &= \text{diag} \left[e^{h(t)} \left(1 - \frac{2m}{r}\right), -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta \right]. \end{aligned}$$

Por último, para eliminar la función $h(t)$ se propone la transformación $t \rightarrow t'$, donde

$$t' = \int_c^t e^{\frac{1}{2}h(u)} du,$$

con c constante. Por otro lado, dado que se está considerando un tensor 2-covariante, la regla de transformación para el elemento $g_{00} = e^{h(t)} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)$ de la métrica cumple

$$g'_{00} = \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} g_{00},$$

entonces

$$g'_{00} = \left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\right)^{-2} g_{00}.$$

Luego, utilizando el teorema fundamental del cálculo, el factor de transformación se escribe como sigue

$$\left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\right)^{-2} = \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^{-2} = (e^{\frac{1}{2}h(t)})^{-2} = e^{-h(t)}.$$

Siempre puede utilizarse una transformación de esta forma para reescribir el primer término de la métrica solamente como $\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$. Así, el elemento de línea para la **métrica de Schwarzschild** es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.22)$$

Una vez establecida la forma del elemento de línea, puede fijarse la constante m mediante el límite clásico. Debido a que en este límite la descripción debe coincidir la mecánica clásica, se considera el potencial central producido por una masa M

$$\Phi = -\frac{GM}{r},$$

y utilizando la ecuación (2.4) se tiene

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}.$$

Por lo tanto, comparando con el término g_{00} , la constante m debe ser

$$m = \frac{GM}{c^2}.$$

2.3. Solución esféricamente simétrica modificada

En esta sección se muestra una forma general de escribir una métrica con simetría esférica, modificada. Siguiendo el desarrollo de (DeBenedictis, 2007), se comienza con un elemento de línea esféricamente simétrico

$$g_{ab} = \text{diag}(-e^\gamma, e^\alpha, r^2, r^2 \sin^2 \theta), \quad (2.23)$$

donde γ y α son funciones del radio. Luego, a partir de las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

pueden encontrarse los elementos distintos de cero del tensor de Einstein. En unidades geométricas ($c = 1$ y $G = 1$)

$$\begin{aligned} G_t^t &= \frac{e^{-\alpha(r)}}{r^2} (1 - r\alpha(r),r) - \frac{1}{r^2} = 8\pi T_t^t, \\ G_r^r &= \frac{e^{-\alpha(r)}}{r^2} (1 + r\gamma(r),r) - \frac{1}{r^2} = 8\pi T_r^r, \\ G_\theta^\theta &= \frac{e^{-\alpha(r)}}{2} \left(\gamma(r),r,r + \frac{1}{2}(\gamma(r),r)^2 + \frac{1}{r}(\gamma(r) - \alpha(r)),r - \frac{1}{2}\alpha(r),r\gamma(r),r \right) = 8\pi T_\theta^\theta \\ G_\varphi^\varphi &= \frac{e^{-\alpha(r)}}{2} \left(\gamma(r),r,r + \frac{1}{2}(\gamma(r),r)^2 + \frac{1}{r}(\gamma(r) - \alpha(r)),r - \frac{1}{2}\alpha(r),r\gamma(r),r \right) = 8\pi T_\varphi^\varphi, \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde $G_\theta^\theta \equiv G_\varphi^\varphi$. De la ecuación para la componente temporal, se tiene

$$\begin{aligned} e^{-\alpha(r)}(1 - r\alpha(r),r) - 1 &= 8\pi r^2 T_t^t, \\ e^{-\alpha(r)}(1 - r\alpha(r),r) &= 8\pi r^2 T_t^t + 1, \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde el lado izquierdo de la ecuación se reescribe como

$$\begin{aligned} \partial r [re^{-\alpha(r)}] &= [re^{-\alpha(r)}],r \\ &= e^{-\alpha(r)} - re^{-\alpha(r)}\alpha(r),r \\ &= e^{-\alpha(r)}(1 - r\alpha(r),r) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \partial r [re^{-\alpha(r)}] &= 8\pi r^2 T_t^t + 1, \\ re^{-\alpha(r)} &= \int 8\pi r^2 T_t^t dr + r, \\ \Rightarrow e^{-\alpha(r)} &= \frac{8\pi}{r} \int r^2 T_t^t(r) dr + 1. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Por otro lado, de la ecuación (2.23) se sabe que la componente radial de la métrica es $g_{11} = e^\alpha$. Identificando esto con la ecuación obtenida anteriormente, $g_{11}^{-1} = e^{-\alpha}$.

Entonces

$$\frac{8\pi}{r} \int r^2 T_t^t(r) dr + 1 = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (2.29)$$

ya que se espera que la métrica siga siendo esféricamente simétrica. Al despejar, se tiene

$$m(r) = -4\pi \int r^2 T_t^t(r) dr. \quad (2.30)$$

Finalmente, en analogía con el caso de la sección anterior, se establece la relación $g_{11}^{-1} = e^{-h_0} g_{00}$, donde el coeficiente exponencial puede reabsorberse utilizando el cambio de coordenadas

$$t' = \int_{cte=c}^t e^{1/2h_0(u)} du. \quad (2.31)$$

De modo que, utilizando el teorema fundamental del cálculo, se obtiene la relación

$$g_{11}^{-1} = 1 - \frac{2m(r)}{r} = -g_{00}. \quad (2.32)$$

Como solución a la ecuación (2.30), se propone

$$T_t^t(r) = -\frac{M}{4\pi r^2} \delta(r). \quad (2.33)$$

2.4. Métrica de Schwarzschild con corrección de Ungravity

En la última sección de este capítulo se presentan las consideraciones tomadas en (Gaete, Helayél-Neto y Spallucci, 2010), que resultan en una métrica de Schwarzschild modificada. Se comienza escribiendo la acción como

$$S \equiv S_M + S_U \quad (2.34)$$

donde S_M es la acción para materia ordinaria, partículas del Modelo Estándar, y S_U la acción de Ungravity. Para la materia ordinaria, se introduce la acción de un fluido estático sin presión, de la forma

$$S_M \equiv - \int d^4x \sqrt{g} \rho(x) u^\mu u^\nu, \quad (2.35)$$

donde la densidad singular de energía representa una partícula puntual

$$\rho(x) \equiv \frac{M}{\sqrt{g}} \int d\tau \delta(x - x(\tau)). \quad (2.36)$$

Para la acción de Ungravity (Gaete, Helayél-Neto y Spallucci, 2010) se tiene

$$S_U = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{g} \left[1 + \frac{A_{d_U}}{(2d_U - 1) \sin(\pi d_U)} \frac{\kappa_*^2}{\kappa^2} \left(\frac{-D^2}{\Lambda_U^2} \right)^{1-d_U} \right]^{-1} R, \quad (2.37)$$

cuyo primer término es la acción de Einstein-Hilbert y el segundo término es la acción efectiva no local.

Para la ecuación anterior, D^2 es el operador D'Alembertiano $D^2 = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ y las constantes tienen los siguientes valores:

$$A_{d_U} \equiv \frac{16\pi^{5/2}}{(2\pi)^{2d_U}} \frac{\Gamma(d_U + 1/2)}{\Gamma(d_U - 1) \Gamma(2d_U)} \quad (2.38)$$

y

$$\kappa_* \equiv \frac{1}{\Lambda_U} \left(\frac{\Lambda_U}{M_U} \right)^{d_{UV}}, \quad (2.39)$$

que para el caso $d_{UV} \simeq 1$, cumple $\kappa_* \simeq \frac{1}{M_U}$.

Para resolver las ecuaciones de Einstein provenientes de la acción propuesta, se varía la acción respecto de la métrica $g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} R_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu R &= \kappa^2 \left[1 + \frac{A_{d_U} \Lambda_U^{2-2d_U}}{(2d_U - 1) \sin(\pi d_U)} \frac{\kappa_*^2}{\kappa^2} (-D)^{d_U-1} \right] T_\nu^\mu, \\ &\equiv \kappa^2 T_\nu^\mu + \kappa_*^2 \frac{A_{d_U}}{\sin(\pi d_U)} T_{U\nu}^\mu, \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde el primer término del lado derecho corresponde a la solución de Schwarzschild. El segundo término modifica dicha solución, donde

$$T_{U\nu}^\mu \equiv \frac{\Lambda_U^{2-2d_U}}{2d_U - 1} (-D)^{d_U-1} T_\nu^\mu, \quad (2.41)$$

corresponde al tensor de energía momento. Al escribir el término de corrección del lado derecho se agrega una contribución extra al tensor de energía momento. Dado que este sistema (tipo Schwarzschild) es una solución de vacío, la contribución extra debe ser algo distinto a la materia convencional, es decir la del Modelo Estándar. Por ello se considera que el término (2.41) es una contribución de materia exótica.

Debido a la forma de la ecuación anterior, se espera que la solución sea de tipo Schwarzschild (simetría esférica) por lo que la solución propuesta para el tensor de energía momento, $T^{\mu\nu}$, como se ve en la sección anterior, tiene la forma

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -\frac{M}{4\pi r^2} \delta(r) \\ T_r^r &= 0 \\ T_\theta^\theta &= T_\phi^\phi = -\frac{M}{16\pi r} \delta(r) \frac{1}{g_{00}} \partial_r g_{00}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde T_θ^θ y T_ϕ^ϕ son tales que cumplen la ecuación de conservación $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Para la forma del tensor de energía momento con corrección de Ungravity, la modificación se introduce en el término de masa (tipo de materia) por lo que en la ecuación anterior, simplemente se sustituye el coeficiente M por la función $M(r)$ (dada la simetría). Dicha función cumple con las siguientes expresiones

$$g_{rr}^{-1} = 1 - \frac{2G_N}{r} M(r) = -g_{00} \quad \text{y} \quad M(r) \equiv 4\pi \int dr r^2 T_0^0. \quad (2.43)$$

A partir de lo anterior, junto con la definición del tensor $T_{U\nu}^\mu$ dada por (2.41) y la densidad de energía (2.36) se tiene que la función de masa es

$$M(r) = \frac{2^{2d_U-2}}{4\pi^{1/2}} \frac{\Gamma(d_U - 1/2)}{\Gamma(2 - d_U)} M \Lambda_U^{2-2d_U} \left(\frac{1}{r} \right)^{2d_U-2} \quad (2.44)$$

y, por lo tanto, las componentes modificadas de la métrica son

$$\begin{aligned} g_{rr}^{-1} = -g_{00} &= 1 - \frac{2MG_N}{r} \left[1 + \kappa_*^2 \frac{A_{d_U}}{\sin(\pi d_U)} \frac{M(r)}{2MG_N} \right] \\ &= 1 - \frac{R_s}{r} \left[1 + \frac{M_{Pl}^2 \kappa_*^2}{\pi^{2d} - 1} \Lambda_U^{2-2d_U} \frac{\Gamma(d_U - 1/2) \Gamma(d_U + 1/2)}{\Gamma(2d_U)} \left(\frac{1}{r} \right)^{2d_U-2} \right]. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Finalmente, definiendo

$$\Gamma_U \equiv \frac{2}{\pi^{2d_U-1}} \frac{\Gamma(d_U - 1/2) \Gamma(d_U + 1/2)}{\Gamma(2d_U)} \quad \text{y} \quad R_* \equiv \frac{1}{\Lambda_U} \left(\frac{M_{Pl}}{M_U} \right)^{1/(d_U-1)} \quad (2.46)$$

se escribe las componentes temporal y radial de la métrica como

$$g_{rr}^{-1} = -g_{00} = 1 - V_N(r) \left[1 + \Gamma_U \left(\frac{R_*}{r} \right)^{2d_U-2} \right], \quad (2.47)$$

donde el radio de Schwarzschild $R_s = 2MG_N = 2M/M_{Pl}^2$ y $-V_N$ es el potencial Newtoniano.

2.5. Constante cosmológica efectiva

En (Diaz-Barron y Sabido, 2021) se obtiene una constante cosmológica efectiva en términos de la masa característica de Unparticles M_u y la dimensión d_u . Se parte de la temperatura de Hawking para un agujero negro de Schwarzschild con correcciones de Ungravity, utilizando la ecuación 5.77. Así, la temperatura modificada tiene la forma

$$T_U = \frac{\hbar c}{4\pi k_B \tilde{r}_h} \left[1 + \frac{2(2d_U - 1) \Gamma_U}{1 + \Gamma_U \left(\frac{R}{\tilde{r}_h} \right)^{2d_U-2}} \left(\frac{R}{\tilde{r}_h} \right)^{2d_U-2} \right], \quad (2.48)$$

donde, al igual que en los demás casos considerados en este trabajo, los parámetros de Ungravity cumplen

$$\Gamma_U = \frac{2}{\pi^{2d_U-1}} \frac{\Gamma(d_U - 1/2) \Gamma(d_U + 1/2)}{\Gamma(2d_U)} \quad \text{y} \quad R = \frac{1}{\Lambda_U} \left(\frac{M_{Pl}}{M_U} \right)^{1/(d_U-1)}. \quad (2.49)$$

De la expresión (2.48) puede escribirse el diferencial de la entropía modificada como

$$dS_U = d(A) \frac{k_B c^3}{4\hbar G} \left(\frac{1}{1 + \Gamma_U \left(\frac{R}{\tilde{r}_h} \right)^{2d_U-2}} \right), \quad (2.50)$$

y a partir de esta ecuación puede encontrarse la expresión para la entropía del agujero negro con correcciones de Ungravity. Luego, mediante la relación área entropía para agujeros negros, en su versión modificada, se obtienen de dos modos distintos las ecuaciones de Friedmann². Primero, la ecuación de Friedmann se obtiene para

²La cosmología en el marco de la Relatividad General, basada en un elemento de línea Robertson-Walker y considerando que el universo a gran escala está conformado por un fluido perfecto, está descrita por la ecuación de Friedmann. Como se mencionó al inicio de este capítulo, a esta escala los efectos de la constante cosmológica añadida a las ecuaciones de campo se vuelven relevantes.

el valor particular $d_u = \frac{3}{2}$ y permaneciendo al orden más bajo. En el límite $t \rightarrow \infty$ (equivalente a $\rho \rightarrow 0$) dicha ecuación es

$$H^2 + \frac{\kappa}{a^2} = \frac{\pi^4}{36R^2}. \quad (2.51)$$

Después, con el fin de obtener la constante cosmológica efectiva para d_u general, se calculan numéricamente las soluciones para valores alrededor de $d_u = \frac{3}{2}$. Así, resulta la siguiente expresión aproximada para la constante cosmológica efectiva

$$\Lambda_{eff} \sim \Lambda_u^2 \left(\frac{M_u}{M_{pl}} \right)^{\frac{2}{d_u-1}}. \quad (2.52)$$

De este resultado y con el fin de comparar con los resultados de los capítulos 4 y 5, se grafica el espacio de parámetros para los valores $d_u = \frac{3}{2}$, $d_u = 2$, $d_u = 3$ y $d_u = 4$, considerando el valor de la constante cosmológica, sin correcciones, como $\Lambda = 1.1056 \times 10^{-52} \text{m}^{-2}$. Ambos ejes de la gráfica están en escala logarítmica.

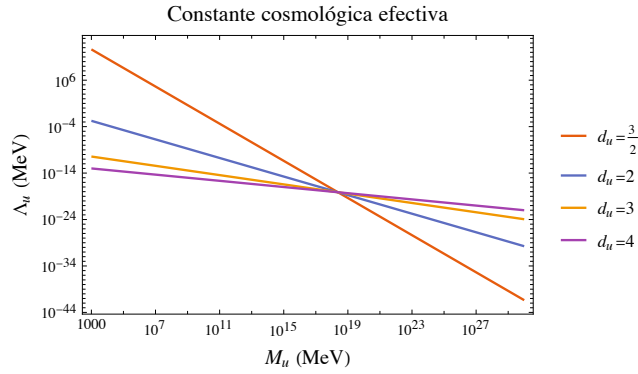


FIGURA 2.1: Espacio de parámetros para una constante cosmológica efectiva, a partir de la ecuación de Friedmann modificada.

Capítulo 3

Pruebas clásicas de la Relatividad General (RG)

3.1. Precesión del Perihelio de Mercurio

Con la órbita de un planeta descrita como una elipse, si se toma un punto fijo en dicha órbita y se compara su posición antes y después de una revolución, se observa una pequeña diferencia entre ambos puntos. A este efecto se le denomina precesión de la órbita. Con las leyes de Kepler, cap. 1, modelo empleado para describir el sistema solar, este fenómeno no tiene descripción analítica. Si bien es cierto que dentro de la teoría clásica la precesión aparece al introducir un término de perturbación, que proviene de considerar el efecto de los demás planetas en el campo gravitacional que determina la trayectoria de cada planeta, esta predicción resulta en discrepancia con la precesión observada, por ejemplo, para la órbita de Mercurio. En tal caso, si se toma como referencia el punto más cercano de la órbita al sol, denominado perihelio, se observa una diferencia aproximada de 43 segundos de arco por siglo. Lo anterior significa que, siendo la órbita de Mercurio una elipse, el semieje mayor de dicha elipse se ve desplazado un ángulo de 43 segundos de arco, cada cien años, como puede visualizarse en la figura 3.1.

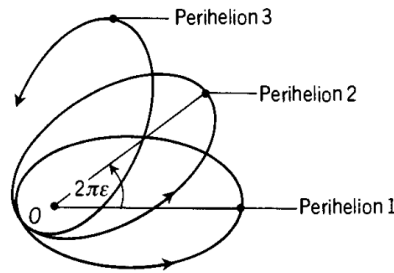


FIGURA 3.1: Precesión del perihelio de una órbita elíptica (d'Inverno, 1998).

El análisis de este fenómeno en el marco de la Relatividad General inicia con la solución de Schwarzschild, obtenida en el capítulo anterior

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.1)$$

donde m es la denominada masa geométrica $m = \frac{GM}{c^2}$ y M la masa fuente del campo. Para nuestro sistema planetario M es la masa del sol $M_{\odot}$.

Al tratarse de una partícula con masa en presencia de un campo gravitacional de simetría esférica, la partícula en cuestión se moverá sobre una geodésica tipo espacio. Con el fin de obtener las ecuaciones de movimiento de la partícula, se define el funcional

$$2k = g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b = \beta, \quad (3.2)$$

donde β toma los valores $\beta = 1, 0$ y -1 , si se trata de geodésicas tipo espacio, nulas o tipo tiempo, respectivamente. De este modo, la ecuación de geodésicas puede escribirse como la variación de un funcional, usando el principio de acción estacionaria. Así, k cumple una ecuación de Euler - Lagrange

$$\frac{\partial k}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial k}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 0. \quad (3.3)$$

Considerando $\beta = 1$ y la solución de Schwarzschild obtenida en el capítulo anterior, la ecuación (3.2) se escribe como

$$2k = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = 1, \quad (3.4)$$

donde el punto denota la derivada con respecto al tiempo propio τ . La ecuación de movimiento para cada coordenada x^α se muestra a continuación.

■ $\alpha = 0$:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0. \quad (3.5)$$

■ $\alpha = 1$:

$$\frac{m}{r^2} \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} \frac{m}{r^2} \dot{r}^2 - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + \frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r} \right] = 0. \quad (3.6)$$

■ $\alpha = 2$:

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0. \quad (3.7)$$

■ $\alpha = 3$:

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0. \quad (3.8)$$

Al igual que en el desarrollo clásico de este fenómeno, al considerar la conservación del momento angular en el sistema en cuestión, es conveniente hacer la descripción utilizando únicamente la variable angular ϕ . Esto implica describir al sistema sobre un plano. Para ello, se fija el valor del ángulo polar $\theta = \frac{\pi}{2}$ y se Sustituye en las ecuaciones de movimiento. La ecuación (3.7) toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) &= 0, \\ 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Luego, dado que la derivada $\dot{\theta} = 0$ y que la coordenada radial es variable, se cumple que

$$\ddot{\theta} = 0.$$

Así, se garantiza que al menos las primeras dos derivadas del ángulo se anulan y el movimiento puede ser descrito en un plano θ constante (las derivadas de orden

superior también deben anularse). Del mismo modo, con el valor fijo $\theta = \frac{\pi}{2}$, la ecuación (3.8) se reescribe como

$$r^2 \dot{\phi} = h, \quad (3.10)$$

donde h es la constante asociada con la magnitud del momento angular por unidad de masa (en analogía con el problema de Kepler clásico en Mecánica Clásica).

Por otro lado, con el fin de escribir el elemento de línea (3.4) como una ecuación diferencial en función del ángulo ϕ , ésta se reescribe sustituyendo la ecuación de movimiento (3.5). Entonces

$$a^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 = 1, \quad (3.11)$$

definiendo la constante $a \equiv \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}$. Además se realiza el cambio de variable $u \equiv 1/r$, lo que implica escribir la derivada de la coordenada radial como

$$\dot{r} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{u} \right) = \frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau}, \quad (3.12)$$

debido a que las ecuaciones de movimiento son funciones $r(\phi)$ y $\phi(\tau)$. En términos de u , la ec. (3.10) toma la forma

$$\frac{d\phi}{d\tau} = hu^2,$$

y al sustituir este término en la expresión (3.12), se tiene

$$\dot{r} = -h \frac{du}{d\phi}. \quad (3.13)$$

Entonces, se reescribe (3.11) usando (3.10)

$$a^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - h^2 u^2 = 1,$$

y sustituyendo la relación para $\dot{r}$ en términos de ϕ , se tiene

$$a^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} h^2 \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - h^2 u^2 = 1.$$

Al reacomodar los términos, se obtiene la ecuación diferencial

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{a^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2} u + 2mu^3. \quad (3.14)$$

La solución de esta ecuación describe la trayectoria de una partícula de prueba sobre una línea de tiempo constante.

Por último, para obtener una ecuación diferencial de segundo orden, se deriva la ecuación anterior con respecto de ϕ . Entonces

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2, \quad (3.15)$$

conocida como ecuación de Binet. En este caso el segundo término actúa como corrección a la ecuación de secciones cónicas, que es la solución en el problema clásico. La solución de esta ecuación se obtiene mediante un método perturbativo, al proponer el término de expansión

$$\varepsilon = \frac{3m^2}{h^2}, \quad (3.16)$$

que es en general pequeño (de orden 10^{-8}) para el sistema solar. Al escribir en términos del parámetro de expansión, la ecuación diferencial del sistema es

$$u'' + u = \frac{m}{h^2} + \frac{\varepsilon h^2}{m} u^2, \quad (3.17)$$

donde u' denota la derivada con respecto de ϕ . Dicha ecuación diferencial tiene como solución la serie de la forma

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.18)$$

Al considerar la solución anterior a primer orden en ε y sustituir en (3.17), se obtiene

$$u_0'' + \varepsilon u_1'' + u_0 + \varepsilon u_1 = \frac{\varepsilon h^2}{m} u_0^2 + \frac{m}{h^2}, \quad (3.19)$$

que puede escribirse como la suma de dos ecuaciones diferenciales, una para cada potencia de ε . Así, las ecuaciones para orden ε^0 y ε son, respectivamente,

$$u_0'' + u_0 = \frac{m}{h^2} \quad (3.20)$$

y

$$u_1'' + u_1 = \frac{h^2}{m} u_0^2. \quad (3.21)$$

La ecuación diferencial a orden cero (3.20) es la que se obtiene en el análisis clásico del problema, como se mencionó anteriormente, tiene como solución a la ecuación de secciones cónicas

$$u_0 = \frac{m}{h^2} (1 + e \cos \phi) \quad (3.22)$$

Al sustituir esta solución en la ecuación diferencial a primer orden (3.21), se obtiene la ecuación diferencial

$$u_1'' + u_1 = \frac{m}{h^2} \left[1 + 2e \cos \phi + e^2 \left(\frac{1 + \cos 2\phi}{2} \right) \right], \quad (3.23)$$

que se resuelve al proponer una solución de la forma $u_1 = A + B\phi \sin \phi + C \cos 2\phi$. Es decir que la ecuación diferencial cumple

$$u_1'' + u_1 = A + 2B \cos \phi - 3C \cos 2\phi. \quad (3.24)$$

Al identificar esta ecuación con (3.23), se fijan los valores de las constantes A , B y C , como

$$A = \frac{m}{h^2} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right), \quad B = \frac{me}{h^2}, \quad C = -\frac{me^2}{6h^2},$$

por lo que la solución para la ecuación (3.23) es

$$u_1 = \frac{m}{h^2} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) + \frac{me}{h^2} \phi \sin \phi - \frac{me^2}{6h^2} \cos 2\phi. \quad (3.25)$$

Ahora, teniendo las soluciones a orden cero y uno en ε , ecuaciones (4.22) y (3.25), se escribe la solución propuesta (3.18) como

$$u = \frac{m}{h^2} \left[1 + e \cos \phi + \frac{\varepsilon m}{h^2} \left(1 + \frac{e^2}{2} + e\phi \sin \phi - \frac{e^2}{6} \cos 2\phi \right) \right]. \quad (3.26)$$

En esta ecuación, los términos entre paréntesis representan las correcciones a primer orden de la solución clásica. Debido a que la ecuación de movimiento obtenida describe a las órbitas cerradas, los términos constantes y de la forma $\cos 2\phi$ no representan una contribución significativa para el sistema, pues es constante en cada revolución. Por otro lado, la corrección de la forma $\phi \sin \phi$ incrementa de forma lineal en el ángulo. Entonces se conserva únicamente ésta última como corrección a la solución de orden cero y la ecuación de movimiento toma la forma

$$u = \frac{m}{h^2} (1 + e \cos \phi + \varepsilon e \phi \sin \phi), \quad (3.27)$$

que se reescribe como

$$u = \frac{m}{h^2} \{ 1 + e \cos [\phi(1 - \varepsilon)] \}, \quad (3.28)$$

al considerar que $e\phi \ll 1$.

Para esta ecuación de movimiento se analiza un periodo orbital completo $T = 2\pi$. Al sustituir en el argumento del coseno

$$\phi_c(1 - \varepsilon) = 2\pi, \quad (3.29)$$

se puede escribir

$$\phi_c \approx 2\pi(1 + \varepsilon),$$

a primer orden en ε . De este modo se identifica el segundo término como la contribución extra al ángulo, denominada precesión

$$\Delta \simeq 2\pi\varepsilon. \quad (3.30)$$

Luego, para escribir la precesión en términos de observables astronómicos, se utiliza la relación $h^2 = Gma(1 - e^2)$, así como la definición de ε y de la masa geométrica en unidades no relativistas. Ello permite obtener la siguiente expresión para la precesión de las órbitas

$$\Delta \simeq \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}. \quad (3.31)$$

Se introducen en la ecuación anterior los datos de la órbita de Mercurio

$$GM = 1.327 \times 10^{20} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}, \quad a = 5.7909 \times 10^{10} \text{m} \quad \text{y} \quad e = 0.2056, \quad (3.32)$$

lo que resulta en el ángulo de precesión

$$\Delta \simeq 5.018 \times 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{rev}}. \quad (3.33)$$

Finalmente, se reescribe la precesión obtenida en unidades de segundo de arco por siglo, considerando el periodo $T = 0.2408$ años. Esto implica que el número de vueltas que completa dicho planeta en un siglo sea $N = 415.2824$ revoluciones. Así, la precesión es

$$\Delta \simeq 42.93 \frac{''}{\text{siglo}}. \quad (3.34)$$

Esta predicción supuso el primer éxito de la teoría de Einstein, al encajar con la precesión observada $\Delta_{obs} = 43.1 \pm 0.5 ''/\text{siglo}$.

3.2. Curvatura de la luz

La noción de curvatura en el espacio, junto con la definición de la geodésica, entendida como la trayectoria sobre la que viaja una partícula de prueba, implica que los fotones viajen sobre trayectorias curvas en presencia de campos gravitacionales. Para la descripción de este fenómeno, en el caso de campos gravitacionales con simetría esférica, se considera el elemento de línea de Schwarzschild (2.22) y la notación de la geodésica como funcional (3.2) descrita en la sección anterior. Para geodésicas tipo tiempo, la ecuación se escribe como

$$2k = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = 0. \quad (3.35)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en la sección anterior, se utiliza la ecuación de Euler-Lagrange (3.3) para obtener las ecuaciones de movimiento. De este procedimiento, se siguen las ecuaciones (3.5) a (3.10) y, análoga a la ecuación (3.11), se obtiene

$$k^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 = 0. \quad (3.36)$$

Esta ecuación diferencial se reescribe mediante el cambio de variable $u = 1/r$, lo que permite escribir la derivada del radio como en (3.13). Entonces la ecuación anterior es

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{k^2}{h^2} + 2mu^3. \quad (3.37)$$

Al derivar respecto de ϕ , resulta la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3mu^2. \quad (3.38)$$

Primero, se obtiene la solución a la ecuación homogénea

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 0, \quad (3.39)$$

que proviene de considerar el límite $m \rightarrow 0$. Dado que, de la solución de Schwarzschild, m es la masa fuente del campo gravitacional, este es el caso de límite de Relatividad Especial. Tiene como solución

$$u = \frac{\sin(\phi - \phi_0)}{D}, \quad (3.40)$$

que es la ecuación de una recta en coordenadas polares $r = \frac{D}{\cos(\phi - \alpha)}$, para los valores del ángulo $\phi_0 \leq \phi \leq \phi_0 + \pi$. El parámetro D representa el punto de mayor acercamiento al origen, como se ilustra en la figura 3.2. En este límite, la solución coincide con la predicción de la Mecánica Clásica, donde la luz sigue siempre una trayectoria en línea recta.

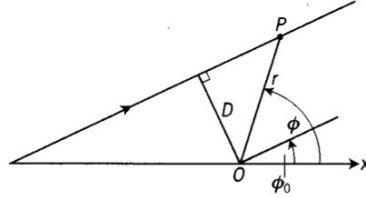


FIGURA 3.2: Trayectoria de un rayo de luz en el espacio plano (d'Inverno, 1998).

Al igual que en la sección anterior, la ecuación diferencial (3.38) puede pensarse como una perturbación del caso clásico, si se considera el parámetro m/r como pequeño. De este modo, se propone la solución de la forma

$$u = u_0 + 3mu_1, \quad (3.41)$$

donde la solución del problema clásico u_0 es la ecuación (3.40). Sustituyendo la propuesta anterior en (3.38), a primer orden en mu , la ecuación diferencial toma la forma

$$u_0'' + 3mu_1'' + u_0 + 3mu_1 = 3mu_0^2, \quad (3.42)$$

donde u'' denota la segunda derivada con respecto de ϕ . De ésta pueden identificarse dos ecuaciones. La primera de orden cero en mu , $u_0'' + u_0 = 0$, que como se mencionó anteriormente, tiene como solución la recta (3.40). La segunda, de orden mu ,

$$u_1'' + u_1 = u_0^2,$$

se resuelve sustituyendo la solución u_0 y fijando la condición de frontera $\phi_0 = 0$,

$$u_1'' + u_1 = \frac{\sin^2 \phi}{D^2}. \quad (3.43)$$

A su vez, la solución de esta ecuación se obtiene como la suma de la solución homogénea y la solución particular. La ecuación homogénea $u_1'' + u_1 = 0$ tiene como solución $u_{1h} = C \cos \phi$, donde C es una constante y el ángulo $\phi_0 = 0$. Por otro lado, la solución de la ecuación particular, reescrita como

$$u_{1p}'' + u_{1p} = \frac{1}{D^2} (1 - \cos^2 \phi) = \frac{1}{D^2} \left(\frac{1 - \cos 2\phi}{2} \right), \quad (3.44)$$

usando $\cos^2 \phi = \frac{1 + \cos(2\phi)}{2}$, se obtiene al proponer la solución de la forma $u_{1p} = A + B \sin 2\phi + C \cos 2\phi$. Al sustituir esta propuesta en (3.44), las constantes A , B y C se identifican con los siguientes valores

$$A = \frac{1}{2D^2}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{6D^2}.$$

De tal modo, la solución particular de la ecuación (3.43) es

$$\begin{aligned} u_{1p} &= \frac{1}{2D^2} + \frac{1}{6D^2} \cos 2\phi = \frac{1}{2D^2} + \frac{1}{6D^2} (2 \cos^2 \phi - 1), \\ u_{1p} &= \frac{1 + \cos^2 \phi}{3D^2}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Así, junto con la solución de la ecuación homogénea u_{1h} , la ecuación de orden uno en mu tiene como solución

$$u_1 = \frac{1 + C \cos \phi + \cos^2 \phi}{3D^2}. \quad (3.46)$$

Con las soluciones a orden cero y orden uno en el parámetro de expansión, ecuaciones (3.40) y (3.46) respectivamente, la solución propuesta en (3.41) se escribe como

$$u = \frac{\sin \phi}{D} + \frac{m(1 + C \cos \phi + \cos^2 \phi)}{D^2}, \quad (3.47)$$

que representa la trayectoria de un rayo de luz en presencia de una fuente campo gravitacional esféricamente simétrico, cuando el cociente m/r es un número pequeño.

Como parte final de este análisis, se considera un rayo de luz que proviene de una estrella, pasando por un punto muy alejado del origen, donde se encuentra el Sol. Entonces se toma el límite $r \rightarrow \infty$ o $u \rightarrow 0$ en la ecuación de movimiento y se obtiene

$$\frac{\sin \phi}{D} + \frac{m(1 + C \cos \phi + \cos^2 \phi)}{D^2} = 0. \quad (3.48)$$

En este límite, la trayectoria asintótica de la luz está descrita, como se mencionó anteriormente, por una línea recta que forma un ángulo $\pi + \varepsilon_2$ con la horizontal. A su vez, la posición aparente de la estrella define también una trayectoria asintótica que forma un ángulo $-\varepsilon_1$ con la horizontal. Dichas trayectorias asintóticas se cruzan en un punto y forman un ángulo δ , como se muestra en la figura a continuación.

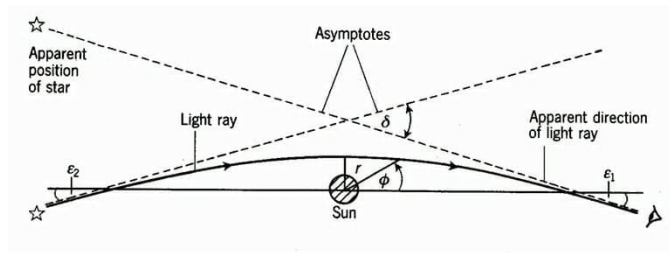


FIGURA 3.3: Trayectorias asintóticas de la luz procedente de una estrella en presencia del campo gravitacional del Sol (d'Inverno, 1998).

Sustituyendo el valor del ángulo $\phi = -\varepsilon_1$ para la asíntota aparente, la ecuación de movimiento toma la forma

$$-\frac{\sin \varepsilon_1}{D} + \frac{m}{D} (1 + C \cos \varepsilon_1 + \cos^2 \varepsilon_1) = 0. \quad (3.49)$$

Dado que la trayectoria es asintótica para $r \rightarrow \infty$, el ángulo ε tiene un valor muy pequeño y pueden utilizarse las aproximaciones de primer orden $\cos \varepsilon_1 \approx 1$ y $\sin \varepsilon_1 \approx \varepsilon_1$.

ε_1 . Entonces la ecuación de movimiento resulta en

$$\frac{-\varepsilon_1}{D} + \frac{m}{D^2}(2 + C) = 0,$$

de donde puede obtenerse directamente el ángulo en términos de las constantes

$$\varepsilon_1 = \frac{m}{D}(2 + C). \quad (3.50)$$

Se siguen un procedimiento y argumentos análogos para la asíntota que forma el ángulo $\phi = \pi + \varepsilon_2$ con la horizontal y se obtiene

$$\frac{-\varepsilon_2}{D} + \frac{m}{D^2}(2 - C) = 0,$$

entonces

$$\varepsilon_2 = \frac{m}{D}(2 - C). \quad (3.51)$$

De la figura 3.3 y considerando que en el límite se tiene que el espacio es plano, se deduce la relación entre ángulos

$$\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (3.52)$$

En esta ecuación se sustituyen las relaciones para los ángulos ε_1 y ε_2 , ecuaciones (3.50) y (3.51) respectivamente. Entonces el ángulo entre las trayectorias asíntóticas cumple

$$\delta = \frac{m}{D}(2 + C) + \frac{m}{D}(2 - C) = \frac{4m}{D}. \quad (3.53)$$

Por lo tanto, la trayectoria de la luz en presencia de un campo gravitacional de simetría esférica está descrita por una curva, que en límite de espacio plano puede describirse en términos de dos líneas rectas: La relacionada con la posición real y la relacionada con la posición aparente de la fuente de luz. En unidades no relativistas, las trayectorias asíntóticas difieren por ángulo de "deflexión"

$$\delta = \frac{4GM}{c^2 D}. \quad (3.54)$$

Este efecto fue medido por primera vez en 1919 bajo la dirección de Sir. Arthur Eddington. Durante un eclipse total se tomaron fotografías de las estrellas que aparecen más cercanas al Sol, de modo que pudiera observarse su posición en presencia del campo gravitacional producido por el Sol, sin que la luz de éste último sature los instrumentos de medición y no permita observarlas. La fotografías en este caso fueron comparadas con fotografías de las mismas estrellas sin la presencia del sol, resultando una diferencia en su posición aparente, debida a la deflexión de la luz. (Will, 2015)

3.3. Corrimiento al rojo gravitacional

Un fotón de frecuencia ν tiene la energía

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad (3.55)$$

donde λ es la longitud de onda. Como puede verse en dicha relación, un cambio en la frecuencia es proporcional a un cambio en la posición en que el fotón se ubica en el espectro electromagnético. Si la frecuencia disminuye, disminuye la energía y el fotón se encontrará más cercano hacia el rojo del espectro visible. Si, por el contrario, la frecuencia aumenta, se acerca al azul.

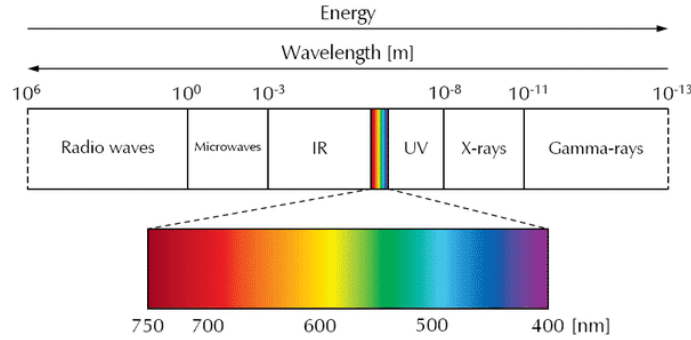


FIGURA 3.4: Espectro electromagnético (luisyp, 2020).

Como se describió en la sección anterior, la luz se ve afectada por los campos gravitacionales, al viajar sobre las geodésicas del espacio tiempo que se curvan junto con éste en presencia de un objeto masivo.

Suponiendo el escenario en que un fotón viaja desde la fuente del campo gravitacional (p. ej. el sol) hacia el exterior, la pérdida de energía que supone la deformación del espacio tiempo debe provenir del aumento en la longitud de onda de la partícula, como se indica en (3.55), dado que su velocidad es constante. Entonces, una menor longitud de onda corresponde a un fotón “corrido hacia el rojo” en el espectro.

Para describir el cambio de la frecuencia del fotón en la presencia de un objeto masivo, se considera un sistema con las siguientes características:

- Un espacio tiempo estático de coordenadas

$$x^a = (x^0, x^\alpha), \quad (3.56)$$

que contiene dos observadores con líneas de mundo x_1^α y x_2^α , respectivamente.

- El primer observador envía información al segundo mediante un fotón, que para cada observador tiene cierta longitud de onda λ .
- Cada observador mide el tiempo entre crestas de dos formas distintas, respecto del tiempo propio $d\tau$ y en términos del tiempo de las coordenadas dx^0 .

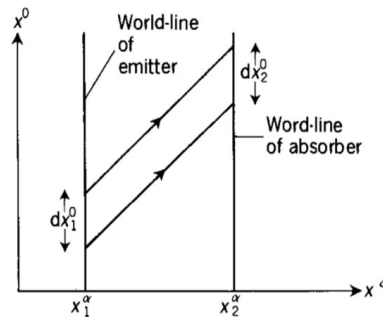


FIGURA 3.5: Sistema ideal de emisión y absorción (d’Inverno, 1998)

Dado que g_{ab} depende sólo de las coordenadas espaciales (espacio tiempo estático), para el observador x_1^α el intervalo entre crestas puede escribirse de la siguiente forma

$$d\tau^2 = g_{ab}(x_1^\alpha) dx_1^a dx_1^b = g_{00}(x_1^\alpha) (dx_1^0)^2, \quad (3.57)$$

debido a que el intervalo espacial es nulo y que el observador permanece en reposo. Del mismo modo, para el segundo observador, la diferencia entre crestas medida en el tiempo propio se denota por

$$(\alpha d\tau)^2 = g_{00}(x_2^\alpha) (dx_2^0)^2, \quad (3.58)$$

donde dx_2^0 es la diferencia medida en el tiempo de las coordenadas.

Además, por la condición de espacio tiempo estático, se cumple

$$dx_1^0 = dx_2^0, \quad (3.59)$$

por lo que al dividir las ecuaciones (3.58) y (3.57) se tiene

$$\alpha = \left(\frac{g_{00}(x_2^\alpha)}{g_{00}(x_1^\alpha)} \right)^{1/2}. \quad (3.60)$$

En esta ecuación, α puede interpretarse como el número de veces que cuenta el reloj del segundo observador, por cada cuenta del primer observador. Entonces, si el sistema que envía la información tiene como frecuencia característica la cantidad ν^0 , el segundo observador medirá la frecuencia

$$\bar{\nu}_0 = \frac{\nu_0}{\alpha} = \nu_0 \left(\frac{g_{00}(x_1^\alpha)}{g_{00}(x_2^\alpha)} \right)^{1/2}. \quad (3.61)$$

Otra característica que cumple este sistema, por la forma en que se estableció, ver figura 3.5, es

$$g_{00}(x_1^\alpha) < g_{00}(x_2^\alpha), \quad (3.62)$$

lo que implica

$$\bar{\nu}_0 < \nu_0. \quad (3.63)$$

Por lo tanto, el fotón experimenta un corrimiento al rojo.

El corrimiento de la frecuencia, definido como el cociente de la diferencia entre la frecuencia inicial, es

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\bar{\nu}_0 - \nu_0}{\nu_0}, \quad (3.64)$$

y sustituyendo (3.61)

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \left(\frac{g_{00}(x_1^\alpha)}{g_{00}(x_2^\alpha)} \right)^{1/2} - 1. \quad (3.65)$$

Luego, al considerar el límite de campo débil

$$g_{00} \simeq 1 + \frac{1\phi}{c^2}, \quad (3.66)$$

se tiene

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq \frac{(1 + 2\phi_1/c^2)^{1/2}}{(1 + 2\phi_2/c^2)^{1/2}} - 1. \quad (3.67)$$

En este límite se cumple que $\frac{\phi}{c^2} \ll 1$, entonces $(1 + 2\phi/c^2)^{1/2} \approx 1 + \frac{\phi}{c^2}$ a primer orden. Por lo tanto, la ecuación (3.64) puede escribirse como

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{\phi_1}{c^2} - \frac{\phi_2}{c^2}. \quad (3.68)$$

Sabiendo que para la solución de Schwarzschild en el límite clásico el potencial corresponde a $\phi = -\frac{GM}{r}$, el corrimiento en la frecuencia

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq -\frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (3.69)$$

De la ecuación anterior, puede notarse que para el caso $r_1 < r_2$ se cumple $\Delta\nu < 0$, corroborando que la frecuencia está desplazada hacia el rojo.

El experimento más famoso en medir este fenómeno fue, sin duda, el realizado por Pound y Rebka, 1959. Propuesto en 1959 y llevado a cabo en el laboratorio Jefferson de la Universidad de Harvard, utilizó el efecto Mössbauer para medir el corrimiento al azul de fotones emitidos desde una fuente radiactiva, debido al campo gravitatorio de la tierra. Con los datos

$$GM = 3.9857 \times 10^{14} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}, \quad r_1 = 6.371 \times 10^6 + 45.1104\text{m} \quad \text{y} \quad r_2 = 6.371 \times 10^6\text{m}, \quad (3.70)$$

el corrimiento predicho por la teoría, ec. (3.69), es

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)_{RG} = 4.92 \times 10^{-15}, \quad (3.71)$$

y, por otro lado, el valor experimental reportado fue 0.997 ± 0.009 veces lo predicho, es decir,

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)_{obs} = 4.905 \times 10^{-15} \pm 0.009. \quad (3.72)$$

De modo que el corrimiento al rojo gravitacional se consolidó como otra de las manifestaciones que los efectos relativistas tienen en el límite de campos gravitatorios débiles, y, por ende, como una prueba más de la validez de la Relatividad General.

Capítulo 4

Pruebas clásicas de RG a partir de ecuaciones clásicas, con correcciones de Ungravity

4.1. Órbitas planetarias a partir de un potencial modificado

Considerando Ungravity como el intercambio de unparticles de espín 2, en Goldberg y Nath, 2008, se presenta un potencial gravitacional efectivo, resultado de comparar el intercambio de ungravitons con el intercambio de partículas de espín 2, es decir, gravitones. En el límite no relativista, dicho potencial tiene la forma

$$V(r) = -Gm_1m_2 \left[\frac{1}{r} + \frac{\xi^2}{\Lambda_u^{d_u-2}} \frac{(2-\alpha_0)}{(2\pi)^{2(d_u-1)}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(2-d_u)\Gamma(d_u+\frac{1}{2})}{\Gamma(2d_u)} f_{d_u}(r) \right]. \quad (4.1)$$

En esta ecuación $\xi = \frac{M_{pl}}{M_u}$, M_{pl} es la masa de Planck, masa característica de las partículas del Modelo Estándar, y M_u es la masa característica de Unparticles, para la cual no se tiene estimado el orden de magnitud.

Para $d_u = 1$ y $\alpha_0 = 1$, se tiene que la función $f_{d_u} = \frac{1}{r}$, por lo que el potencial toma la forma

$$V(r) = -Gm_1m_2 \left[\frac{1}{r} + \xi^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{r} \right) \right]. \quad (4.2)$$

Para los valores de la función Gamma $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ y $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, este potencial se reescribe como

$$\begin{aligned} V(r) &= -Gm_1m_2 \left(\frac{1}{r} + \frac{\xi^2}{r} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right), \\ &= -Gm_1m_2 \frac{(1+\xi^2)}{r}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Luego, se obtiene la fuerza a partir del gradiente $\mathbf{F} = -\nabla V(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \hat{\mathbf{r}}$, siendo

$$\mathbf{F} = Gm_1m_2(1+\xi^2) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.4)$$

entonces

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} (1+\xi^2) \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.5)$$

al considerar el carácter atractivo de la interacción gravitacional.

Nótese que la fuerza tiene la misma forma que la fuerza sin modificaciones, salvo una constante.

Ahora, para el caso en que $d_u \neq 1$, como se señala en la referencia principal de esta sección, el potencial modificado tiene la forma

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r} \right)^{2d_u-2} \right], \quad (4.6)$$

donde

$$R_G = \frac{1}{\pi\Lambda_u} \left(\frac{M_{pl}}{M_u} \right)^{\frac{1}{d_u-1}} \left[\frac{2(2-\alpha)}{\pi} \frac{\Gamma(d_u + \frac{1}{2})\Gamma(d_u - \frac{1}{2})}{\Gamma(2d_u)} \right]^{\frac{1}{2d_u-2}}. \quad (4.7)$$

Aquí el parámetro R_G surge como característica del alcance (distancia) de la interacción de Ungravity, representando el orden de distancia en que estas correcciones se volverían relevantes.

Para este potencial, la fuerza es, a partir del gradiente $\mathbf{F} = -\nabla V(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \hat{\mathbf{r}}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{Gm_1m_2}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r} \right)^{2d_u-2} \right] \right\} \hat{\mathbf{r}}, \\ &= \left\{ -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r} \right)^{2d_u-2} \right] + \frac{Gm_1m_2}{r} R_G^{2d_u-2} (-2d_u + 2) r^{1-2d_u} \right\} \hat{\mathbf{r}}, \\ &= \frac{Gm_1m_2}{r^2} \left\{ -\left[1 + \left(\frac{R_G}{r} \right)^{2d_u-2} \right] + (-2d_u + 2) \left(\frac{R_G}{r} \right)^{2d_u-2} \right\} \hat{\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

y al sumar los términos semejantes

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \left[1 + (2d_u - 1) \left(\frac{R_G}{r} \right)^{2d_u-2} \right] \hat{\mathbf{r}}. \quad (4.9)$$

Con el fin de reducir la notación, se define

$$\alpha \equiv (2d_u - 1) R_G^{2d_u-2}, \quad (4.10)$$

con lo que la ecuación para la fuerza se escribe, finalmente, como

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left[1 + \frac{\alpha}{r^{2d_u-2}} \right] \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.11)$$

adoptando la notación $M = m_1$ y $m = m_2$, donde M se identifica con la masa del sol y m con la masa de los planetas. A partir de esta ecuación para la fuerza, se resuelve el problema de órbitas planetarias.

En coordenadas esféricas, la segunda ley de Newton, $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$, puede escribirse como

$$(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\frac{GM}{r} \left[1 + \frac{\alpha}{r^{2d_u-2}} \right], \quad (4.12)$$

usando la relación

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad (4.13)$$

y la ecuación (4.11).

De lo anterior se obtienen dos ecuaciones, al hacer el producto interno con $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ y $\hat{\mathbf{r}}$, respectivamente. Para $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, el término $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0$, implica que el momento angular es una cantidad conservada y puede identificarse la cantidad

$$h = r^2\dot{\phi}, \quad (4.14)$$

donde h es el momento angular por unidad de masa, en analogía con el problema sin corrección.

Del producto interno con $\hat{\mathbf{r}}$, se tiene

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \left[1 + \frac{\alpha}{r^{2d_u-2}} \right], \quad (4.15)$$

con $\mu \equiv GM$.

Para escribir la ecuación diferencial, se define la variable $u \equiv \frac{1}{r}$ y, junto con la ecuación (4.14), se reescriben las derivadas en términos de u y h , siendo

$$\dot{r} = -h\frac{du}{d\phi}, \quad \ddot{r} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d^2\phi} \quad \text{y} \quad \dot{\phi}^2 = h^2u^4. \quad (4.16)$$

Con lo anterior, la ecuación (4.15) se reescribe como

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\phi^2} - \frac{1}{u}h^2u^3 = -\mu u^2(1 + \alpha u^{2d_u-2}),$$

entonces

$$-h^2u^2 \left(\frac{d^2u}{d\phi^2} + u \right) = -\mu u^2(1 + \alpha u^{2d_u-2}),$$

y finalmente

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu}{h^2}(1 + \alpha u^{2d_u-2}), \quad (4.17)$$

siendo esta última la ecuación de Binet con la contribución de Ungravity.

Ahora, si se asume que el segundo término del lado derecho de la ecuación es pequeño en comparación con el primero, ésta puede resolverse mediante un método perturbativo. Para ello, se escribe la corrección en términos del parámetro $\varepsilon \equiv \frac{3\mu}{c^2h^2}$, que es pequeño para el sistema solar ($\sim 10^{-8}$). En términos de dicho parámetro, la ecuación diferencial es

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{h^2c^2}{3\mu^2} \alpha u^{2d_u-2} \right) \right], \quad (4.18)$$

y se propone la solución de la forma

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2). \quad (4.19)$$

Al sustituir en la ecuación (4.18), se obtiene

$$u_0'' + \varepsilon u_1'' + u_0 + \varepsilon u_1'' = \frac{\mu}{h^2} + \frac{\varepsilon \mu}{h^2} \left(\frac{h^2 c^2}{3\mu^2} \alpha u_0^{2d_u-2} \right), \quad (4.20)$$

a primer orden en ε y donde u_i'' denota la segunda derivada con respecto a ϕ . De la anterior pueden identificarse dos ecuaciones, una para orden cero y otra para primer orden en ε , siendo

$$\begin{cases} u_0'' + u_0 = \frac{\mu}{h^2}, \\ u_1'' + u_1 = \frac{c^2}{3\mu} \alpha u_0^{2d_u-2}. \end{cases} \quad (4.21)$$

A orden cero se tiene la ecuación de Binet sin correcciones, que tiene como solución a la ecuación de secciones cónicas. Entonces la solución a orden cero es

$$u_0 = \frac{\mu}{h^2} (1 + e \cos \phi), \quad (4.22)$$

tomando las condiciones iniciales $\phi_0 = 0$ y $e = k \frac{h^2}{\mu}$, donde k es una constante de integración.

Para obtener la solución a primer orden en ε , se introduce la solución anterior en la ecuación diferencial para u_1 mostrada en (4.93), resultando

$$u_1'' + u_1 = \frac{c^2 \alpha}{3\mu} \left[\frac{\mu}{h^2} (1 + e \cos \phi) \right]^{2d_u-2}, \quad (4.23)$$

entonces

$$u_1'' + u_1 = \frac{c^2 \alpha \mu^{2d_u-3}}{3h^{4d_u-4}} (1 + e \cos \phi)^{2d_u-2}. \quad (4.24)$$

A continuación, se resuelve la ecuación anterior para los distintos valores $d_u = \frac{3}{2}, 2, 3$ y 4 , para obtener, junto con la solución a orden cero, la forma completa de la solución propuesta para la ecuación diferencial (4.17).

4.1.1. Caso $d_u = \frac{3}{2}$

Para este caso, la fuerza (4.11) toma la forma

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha}{r} \right) \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.25)$$

y la ecuación diferencial general (4.17) es

$$u'' + u = \frac{\mu}{h^2} (1 + 2R_G u), \quad (4.26)$$

que a primer orden en ε puede separarse en las ecuaciones (4.93). Teniendo la solución a orden cero, la ecuación diferencial de primer orden (4.24) es

$$u_1'' + u_1 = \frac{c^2 \alpha}{3h^2} (1 + e \cos \phi). \quad (4.27)$$

Se propone como solución una ecuación de la forma

$$u_1 = A + B\phi \sin \phi, \quad (4.28)$$

que tiene como derivadas

$$u_1' = B \sin \phi + B\phi \cos \phi \quad \text{y} \quad u_1'' = 2B \cos \phi - B\phi \sin \phi, \quad (4.29)$$

donde A y B son constantes a determinar. Así, la ecuación (4.27) puede reescribirse como

$$A + 2B \cos \phi = \frac{c^2 \alpha}{3h^2} + \frac{c^2 \alpha e}{3h^2} \cos \phi, \quad (4.30)$$

de modo que, para satisfacer la igualdad, las constantes quedan fijas a los valores

$$A = \frac{c^2 \alpha}{3h^2} \quad \text{y} \quad B = \frac{c^2 \alpha e}{6h^2}. \quad (4.31)$$

Por lo tanto, la solución a la ecuación (4.27) es

$$u_1 = \frac{c^2 \alpha}{3h^2} + \frac{c^2 \alpha e}{6h^2} \phi \sin \phi. \quad (4.32)$$

Luego, al considerar la solución anterior, junto con la solución a orden cero (4.22), la solución general propuesta (4.19) toma la forma

$$u = \frac{\mu}{h^2} (1 + e \cos \phi) + \varepsilon \left(\frac{c^2 \alpha}{3h^2} + \frac{c^2 \alpha e}{6h^2} \phi \sin \phi \right), \quad (4.33)$$

donde las correcciones aparecen en términos del parámetro ε . Nótese que en esta solución, el término constante de la corrección no constituye un cambio en la órbita, por lo que no se considera como una contribución al problema y se mantiene únicamente la corrección de la forma $\phi \sin \phi$ (en lo sucesivo, se consideran sólo las correcciones de dicha forma, utilizando este mismo argumento). Entonces, la ecuación de movimiento es

$$u = \frac{\mu}{h^2} \left(1 + e \cos \phi + \frac{\varepsilon c^2 \alpha e}{6\mu} \phi \sin \phi \right). \quad (4.34)$$

Luego, se define el parámetro $\delta_{3/2} \equiv \frac{\varepsilon \alpha c^2}{6\mu}$ y se reescribe

$$u = \frac{\mu}{h^2} (1 + e \cos \phi + \delta_{3/2} e \phi \sin \phi). \quad (4.35)$$

Si se considera que $\delta_{3/2}$ es un parámetro pequeño, la aproximación

$$\begin{aligned} \cos(\phi - \delta_{3/2} \phi) &= \cos \phi \cos(\delta_{3/2} \phi) + \sin \delta_{3/2} \sin(\delta_{3/2} \phi), \\ &\approx \cos \phi + \delta_{3/2} \phi \sin \phi, \end{aligned} \quad (4.36)$$

es válida, lo que permite escribir la ecuación de movimiento como

$$u = \frac{\mu}{h^2} \{1 + e \cos [\phi(1 - \delta_{3/2})]\}. \quad (4.37)$$

Escrita en esta forma estándar, puede identificarse la corrección a la ecuación de movimiento como una contribución extra al ángulo, denominada precesión. En orden de calcular la contribución de Ungravity a la precesión de las órbitas, se toma el

argumento del coseno para un periodo completo,

$$\phi_T(1 - \delta_{3/2}) = 2\pi, \quad (4.38)$$

por lo que el ángulo toma el valor

$$\phi_T = \frac{2\pi}{(1 - \delta_{3/2})} \approx 2\pi(1 + \delta_{3/2}), \quad (4.39)$$

aproximando a primer orden en $\delta_{3/2}$. Entonces

$$\phi_T = 2\pi + 2\pi\delta_{3/2} = 2\pi + \frac{\pi\epsilon\alpha c^2}{3\mu}, \quad (4.40)$$

donde el término extra denota la precesión en el ángulo para una revolución completa. Sustituyendo el valor de ϵ , dicha precesión es

$$\Delta_\phi = \frac{\pi\epsilon\alpha c^2}{3\mu} = \frac{\pi\mu\alpha}{h^2}. \quad (4.41)$$

En términos de los parámetros astronómicos

$$\mu = GM \quad \text{y} \quad h^2 = GMa(1 - e^2), \quad (4.42)$$

donde M es la masa del sol, a es el semieje mayor de la órbita y e su excentricidad, se obtiene la expresión para la precesión

$$\Delta_\phi = \frac{\pi\alpha}{a(1 - e^2)}, \quad (4.43)$$

y, utilizando la definición de α (4.10),

$$\Delta_\phi = \frac{2\pi R_G}{a(1 - e^2)}. \quad (4.44)$$

Para la órbita de Mercurio, utilizando los valores

$$a = 5.7909 \times 10^{10} \text{m}, \quad GM = 1.327 \times 10^{20} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2} \quad \text{y} \quad e = 0.2056, \quad (4.45)$$

la precesión es

$$\Delta_\phi = (1.13 \times 10^{-10} \text{m}^{-1}) R_G. \quad (4.46)$$

Finalmente, al considerar la cota calculada en Romero y Vergara, 2003, para la precesión observada y la predicha por Relatividad General, se tiene que cualquier corrección extra debe cumplir la relación

$$|\Delta_\phi| \leq |\Delta_{obs} - \Delta_{GR}| \leq 2\pi \times 10^{-12} \frac{\text{rad}}{\text{rev}}, \quad (4.47)$$

con lo que se acota el valor absoluto de R_G , dando como resultado

$$|R_G| \leq 0.05 \text{m}. \quad (4.48)$$

4.1.2. Caso $d_u = 2$

Para este caso, la ecuación para la fuerza (4.11) es

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left[1 + \frac{\alpha}{r^2} \right] \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.49)$$

a partir de la cual, mediante la segunda ley de Newton, se obtiene la ecuación diferencial

$$u'' + u = \frac{\mu}{h^2} (1 + 3R_G^2 u^2), \quad (4.50)$$

que al resolver con un método perturbativo, puede escribirse como la ecuación para u_0 en (4.17) y la ecuación a primer orden en ε

$$\begin{aligned} u_1'' + u_1 &= \frac{c^2 \alpha \mu}{3h^4} (1 + e \cos \phi)^2, \\ &= \frac{c^2 \alpha \mu}{3h^4} (1 + 2e \cos \phi + e^2 \cos^2 \phi). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Esta ecuación se reescribe, utilizando la identidad $\cos^2 \phi = \frac{1 + \cos 2\phi}{2}$, como

$$u_1'' + u_1 = \frac{c^2 \alpha \mu}{3h^4} \left(1 + 2e \cos \phi + \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2} \cos 2\phi \right), \quad (4.52)$$

y, de manera análoga al caso anterior, se propone la solución de la forma

$$u_1 = A + B\phi \sin \phi + C \cos 2\phi, \quad (4.53)$$

que al derivar cumple con la siguiente ecuación

$$u_1'' + u_1 = A + 2B \cos \phi - 3C \cos 2\phi. \quad (4.54)$$

Luego, al identificar las ecuaciones (4.87) y (4.54), las constantes A, B y C toman los valores

$$A = \frac{c^2 \alpha \mu}{3h^4} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right), \quad B = \frac{c^2 \alpha \mu}{3h^4} e \quad y \quad C = -\frac{c^2 \alpha \mu}{18h^4}. \quad (4.55)$$

Considerando la solución general propuesta (4.19), la ecuación anterior, junto con la solución a orden cero (4.22), permite escribir la ecuación de movimiento como

$$u = \frac{\mu}{h^2} (1 + e \cos \phi) + \frac{\varepsilon c^2 \alpha \mu}{3h^4} \left(1 + \frac{e^2}{2} + e\phi \sin \phi - \frac{e^2}{6} \cos 2\phi \right). \quad (4.56)$$

Bajo el mismo argumento que en el caso anterior, se considera únicamente la contribución de la forma $\phi \sin \phi$, entonces la ecuación de movimiento es

$$u = \frac{\mu}{h^2} \left(1 + e \cos \phi + \frac{\varepsilon c^2 \alpha e}{3h^2} \phi \sin \phi \right), \quad (4.57)$$

y después, con la definición $\delta_2 \equiv \frac{\varepsilon c^2 \alpha}{3h^2}$, donde δ_2 es considerado un parámetro pequeño, la ecuación anterior se escribe

$$u = \frac{\mu}{h^2} \{ 1 + e \cos [\phi(1 - \delta_2)] \}. \quad (4.58)$$

Ahora, para describir la precesión, se considera el argumento del coseno para un periodo completo, dejando al ángulo ϕ_T en términos de la corrección δ_2

$$\phi_T \approx 2\pi(1 + \delta_2) = 2\pi + 2\pi \frac{\mu^2 \alpha}{h^4}. \quad (4.59)$$

Entonces, se identifica la precesión en el ángulo como

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\mu^2\alpha}{h^4}, \quad (4.60)$$

que en términos de los parámetros de las órbitas (4.42) toma la forma

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\alpha}{a^2(1-e^2)^2}. \quad (4.61)$$

Con los datos (4.45), la precesión para la órbita de Mercurio es

$$\Delta\phi = 2\pi(3.25 \times 10^{-22} \text{m}^{-2})\alpha, \quad (4.62)$$

y, con la cota (4.47), se tiene que la cota para α es $|\alpha| \leq 0.75 \times 10^9 \text{m}^2$, la cual se traduce en una cota para el parámetro R_G , siendo $\alpha = 3R_G^2$. Así, la cota para el parámetro de longitud es

$$|R_G| \leq 3.20 \times 10^4 \text{m}. \quad (4.63)$$

4.1.3. Caso $d_u = 3$

La fuerza (4.11) es

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha}{r^4}\right) \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.64)$$

y la ecuación diferencial general

$$u'' + u = \frac{\mu}{h^2} (1 + 5R_G^4 u^4). \quad (4.65)$$

De la ecuación (4.93), la ecuación a primer orden en ε es

$$u_1'' + u_1 = \frac{c^2 \alpha \mu^3}{3h^8} (1 + e \cos \phi)^4. \quad (4.66)$$

El procedimiento para resolver esta ecuación diferencial es análogo al de los casos anteriores. Con el fin de optimizar el tiempo al priorizar el análisis de los resultados, el resto de las ecuaciones diferenciales se resuelve utilizando el software *Mathematica*. De la solución obtenida del software, se mantienen únicamente las correcciones de la forma $\phi \sin \phi$ (las demás contribuciones son constantes o productos de las funciones seno y coseno), que se suman a la solución de orden cero (4.22), como se propuso en la ecuación (4.19).

De lo anterior, la ecuación de movimiento es

$$u = \frac{\mu}{h^2} \left[1 + e \cos \phi + \frac{\varepsilon c^2 \alpha \mu^2}{3h^6} \left(2 + \frac{3}{2} e^2 \right) e \phi \sin \phi \right]. \quad (4.67)$$

Luego, al definir $\delta_3 \equiv \frac{\varepsilon c^2 \alpha \mu^2}{3h^6} \left(2 + \frac{3}{2}e^2\right)$ como un parámetro pequeño, la ecuación de movimiento se escribe como

$$u = \frac{\mu}{h^2} \{1 + e \cos [\phi(1 - \delta_3)]\}. \quad (4.68)$$

Para un periodo completo, el argumento del coseno es igual a 2π y el ángulo ϕ_T es

$$\phi_T \approx 2\pi(1 + \delta_3) = 2\pi + \frac{2\pi\alpha\mu^4}{h^8} \left(2 + \frac{3}{2}e^2\right), \quad (4.69)$$

a primer orden en δ_3 . El término extra se identifica como la precesión de la órbita y se escribe de la siguiente forma en términos de las variables (4.42)

$$\Delta\phi = \frac{10\pi R_G^4}{a^4(1 - e^2)^4} \left(2 + \frac{3}{2}e^2\right), \quad (4.70)$$

tomando α de la definición (4.10). Introduciendo los datos para la órbita de Mercurio (4.45), se tiene que

$$\Delta\phi = 6.85 \times 10^{-42} \text{m}^{-4} R_G^4. \quad (4.71)$$

Finalmente, dada la cota (4.47), la cota para el parámetro R_G es

$$|R_G| \leq 3.09 \times 10^7 \text{m}. \quad (4.72)$$

4.1.4. Caso $d_u = 4$

En este caso la fuerza (4.11) es

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha}{r^6}\right) \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.73)$$

para la cual, la ecuación diferencial tiene la siguiente corrección

$$u'' + u = \frac{\mu}{h^2} (1 + 7R_G^6 u^6), \quad (4.74)$$

y, a primer orden en ε , la ecuación diferencial en (4.93) es

$$u_1'' + u_1 = \frac{c^2 \alpha \mu^5}{3h^{12}} (1 + e \cos \phi)^6. \quad (4.75)$$

De la solución a la ecuación diferencial anterior, sólo las contribuciones de la forma $\phi \sin \phi$ son adheridas a la solución de orden cero (4.22), siguiendo la propuesta (4.19). Entonces

$$u = \frac{\mu}{h^2} \left[1 + e \cos \phi + \frac{\varepsilon c^2 \alpha \mu^4 e}{3h^{10}} \left(3 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 \right) \phi \sin \phi \right]. \quad (4.76)$$

Luego, al definir el parámetro $\delta_4 \equiv \frac{\varepsilon c^2 \alpha \mu^4}{3h^{10}} \left(3 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 \right)$, de manera análoga a los casos anteriores, la ecuación de movimiento puede escribirse en la forma estándar

$$u = \frac{\mu}{h^2} \{1 + e \cos [\phi(1 - \delta_4)]\}. \quad (4.77)$$

Entonces se considera el argumento para un periodo completo y se escribe en términos de (4.42)

$$\begin{aligned}\Delta\phi &\approx 2\pi(1 + \delta_4) = 2\pi \frac{\alpha\mu^6}{h^{12}} \left(3 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 \right), \\ &= 2\pi \frac{\alpha}{a^6(1 - e^2)^6} \left(3 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 \right),\end{aligned}\quad (4.78)$$

sustituyendo el valor de ε .

Con los valores reportados para la órbita de Mercurio (4.45) y la definición de α (4.10), la precesión es

$$\Delta\phi = 2\pi R_G^6 (7.98 \times 10^{-64} \text{m}^{-6}), \quad (4.79)$$

y, finalmente, con la cota (4.47), el valor máximo obtenido para el parámetro R_G es

$$|R_G| \leq 3.28 \times 10^8 \text{m}. \quad (4.80)$$

4.1.5. Sumario y análisis

Para cada valor de d_u , desarrollado en las secciones anteriores, la fuerza Newtoniana corregida y la cota para el parámetro de longitud R_G se muestran a continuación:

d_u	Fuerza	Cota
$\frac{3}{2}$	$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 + \frac{2R_G}{r} \right) \hat{\mathbf{r}}$	$ R_G \leq 0.05 \text{m}$
2	$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 + \frac{3R_G^2}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}}$	$ R_G \leq 3.20 \times 10^4 \text{m}$
3	$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 + \frac{5R_G^4}{r^4} \right) \hat{\mathbf{r}}$	$ R_G \leq 3.09 \times 10^7 \text{m}$
4	$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 + \frac{7R_G^6}{r^6} \right) \hat{\mathbf{r}}$	$ R_G \leq 3.28 \times 10^8 \text{m}$

Ahora, para visualizar el espacio de parámetros de la energía efectiva Λ_u y la masa M_u , se utiliza la relación

$$\Lambda_u = \frac{1}{R_G \pi} \left(\frac{M_p}{M_u} \right)^{1/(d_u-1)} \times \left(\frac{2(2-\alpha_0)}{\pi} \frac{\Gamma(d_u + \frac{1}{2})\Gamma(d_u - \frac{1}{2})}{\Gamma(2d_u)} \right)^{1/(2d_u-2)} \quad (4.81)$$

donde $\alpha_0 = 1$ y la masa de Planck $M_p = 2.4 \times 10^{18} \text{GeV}$. Se consideran unidades naturales ($c = 1, \hbar = 1$), por lo que se utiliza el factor de conversión $1\text{m} = 5 \times 10^{15} \text{GeV}^{-1}$.

El espacio de parámetros para masas en el intervalo $10^3 \text{GeV} \leq M_u \leq 10^{25} \text{GeV}$, se aprecia en la figura 4.1, que tiene ambos ejes en escala logarítmica. Dado que las cotas para el parámetro R_G restringen el máximo valor que éste puede tomar, cada una de las rectas en la gráfica restringe el valor mínimo que puede tomar la energía

Λ_u , de modo que la región por debajo de las rectas queda descartada por las cotas. Al final del trabajo se comparan estos gráficos entre sí, para cada valor de d_u .

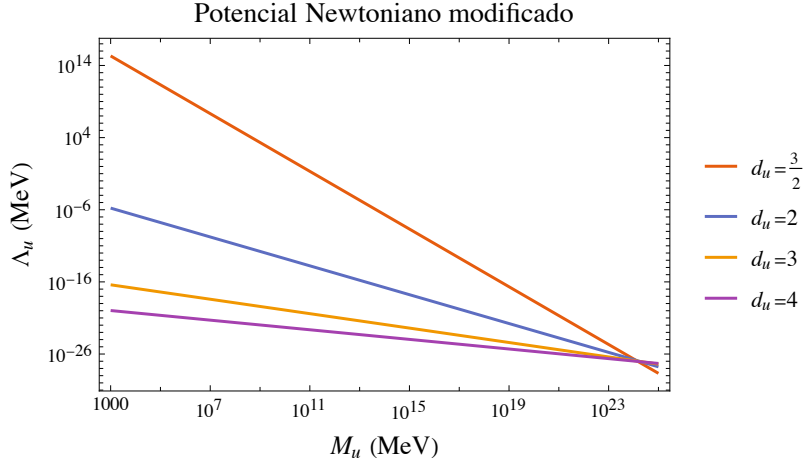


FIGURA 4.1: Espacio de parámetros con cotas para la precesión del perihelio de Mercurio a partir de un potencial Newtoniano modificado.

4.2. Órbitas planetarias a partir de fuerza Newtoniana entrópica y modificada

En el artículo Nicolini, 2010, se parte de una temperatura de Hawking con correcciones de Ungravity

$$T = \frac{\hbar c}{4\pi k_B r_H} \left[1 + \frac{2(2d_u - 1)\Gamma_u}{1 + \Gamma_u \left(\frac{R}{r_H}\right)^{2d_u-2}} \left(\frac{R}{r_H}\right)^{2d_u-2} \right]. \quad (4.82)$$

De lo anterior, utilizando relaciones termodinámicas y el procedimiento para la obtención de una fuerza Newtoniana de origen entrópico, propuesta por Verlinde (Verlinde, 2011), se obtiene la fuerza en el límite de campo débil

$$F \simeq \frac{GMm}{r^2} \left[1 - \Gamma_u \left(\frac{R}{r_H}\right)^{2d_u-2} + \left(\Gamma_u \left(\frac{R}{r_H}\right)^{2d_u-2} \right)^2 \right], \quad (4.83)$$

donde

$$\Gamma_u = \frac{2}{\pi^{2d_u-1}} \frac{\Gamma(d_u - \frac{1}{2})\Gamma(d_u + \frac{1}{2})}{\Gamma(2d_u)}, \quad (4.84)$$

y

$$R = \frac{1}{\Lambda_u} \left(\frac{M_P}{M_u} \right)^{\frac{1}{d_u-1}}. \quad (4.85)$$

Utilizando dicha fuerza, la segunda ley de Newton en coordenadas esféricas puede escribirse como

$$(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\frac{GMm}{r^2} \left[1 - \Gamma_u \left(\frac{R}{r} \right)^{2d_u-2} + \left(\Gamma_u \left(\frac{R}{r} \right)^{2d_u-2} \right)^2 \right] \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.86)$$

al considerar $r_H \approx r$, debido a que la relación de horizonte de agujero negro se extiende a la de cualquier superficie holográfica.

De manera análoga a la sección anterior, se toma el producto interno con $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ y $\hat{\mathbf{r}}$. Del producto interno con $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ resulta la cantidad conservada $h \equiv r^2\dot{\phi}$, que se identifica como el momento angular por unidad de masa. Del producto interno con $\hat{\mathbf{r}}$, se tiene

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \left[1 - \frac{\alpha}{r^{2d_u-2}} + \left(\frac{\alpha}{r^{2d_u-2}} \right)^2 \right], \quad (4.87)$$

donde $\alpha \equiv \Gamma_u R^{2d_u-2} = R_G^{2d_u-2}$ y $\mu \equiv GM$.

Luego, con el cambio de variable $u = \frac{1}{r}$ y el momento $h = r^2\dot{\phi}$, puede reescribirse el lado izquierdo de la ecuación anterior como

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -hu^2 \left(\frac{d^2u}{d\phi^2} + u \right), \quad (4.88)$$

por lo que la ecuación (4.87) toma la forma

$$-hu^2 \left(\frac{d^2u}{d\phi^2} + u \right) = -\mu^2 [1 - \alpha u^{2d_u-2} + (\alpha u^{2d_u-2})^2], \quad (4.89)$$

entonces

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu}{h^2} [1 - \alpha u^{2d_u-2} + (\alpha u^{2d_u-2})^2]. \quad (4.90)$$

El primer término entre corchetes corresponde a la ecuación de Binet, con los términos extras provenientes de Ungravity. Al ir como el inverso del radio, los términos de corrección son, en general, pequeños para las órbitas del sistema solar, por lo que la ecuación diferencial puede resolverse de forma perturbativa. Para ello, al igual que en la sección anterior, se define el parámetro $\varepsilon \equiv \frac{3\mu^2}{c^2 h^2}$, que para el sistema en cuestión cumple $\varepsilon \ll 1$, y se propone la solución de la forma

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2). \quad (4.91)$$

Entonces, la ecuación (4.90) a primer orden en ε es

$$u_0'' + \varepsilon u_1'' + u_0 \varepsilon u_1 = \frac{\mu}{h^2} - \varepsilon \left(-\frac{c^2}{3\mu} \alpha u_0^{2d_u-2} + \frac{c^2}{3\mu} \alpha u_0^{4d_u-4} \right), \quad (4.92)$$

donde se denota como u'' la segunda derivada con respecto de ϕ .

De lo anterior, pueden identificarse dos ecuaciones, una para cada potencia de ε

$$\begin{cases} u_0'' + u_0 = \frac{\mu}{h^2}, \\ u_1'' + u_1 = \frac{-c^2}{3\mu} \alpha u_0^{2d_u-2} + \frac{c^2}{3\mu} (\alpha u_0^{2d_u-2})^2. \end{cases} \quad (4.93)$$

La ecuación a orden cero es la ecuación sin correcciones, cuya solución es la ecuación de secciones cónicas. Al introducir esta solución en la ecuación a primer orden en ε , se obtiene la ecuación diferencial

$$u_1'' + u_1 = -\frac{c^2 \alpha \mu^{2d_u-3}}{3h^{4d_u-4}} (1 + e \cos \phi)^{2d_u-2} + \frac{c^2 \alpha^2 \mu^{4d_u-5}}{3h^{8d_u-8}} (1 + e \cos \phi)^{4d_u-4}. \quad (4.94)$$

Esta es la ecuación de Binet modificada por los términos de no partículas, a partir del límite considerado por Nicolini. Siguiendo el procedimiento de la sección anterior, se resuelven los casos para $d_u = \frac{3}{2}, 2, 3$ y 4.

4.2.1. Caso $d_u = \frac{3}{2}$

Para este caso la fuerza (4.83) es

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left[1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha}{r^2} \right] \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.95)$$

y la ec diferencial de orden ε ,

$$\begin{aligned} u_1'' + u_1 &= -\frac{c^2 \alpha}{3h^2} (1 + e \cos \phi) + \frac{c^2 \alpha \mu}{3h^4} (1 + e \cos \phi)^2 \\ &= -\frac{c^2 \alpha}{3h^2} (1 + e \cos \phi) + \frac{c^2 \alpha \mu}{3h^4} (1 + 2e \cos \phi + e^2 \cos^2 \phi), \end{aligned} \quad (4.96)$$

Para la cual se propone la solución de la forma

$$u_1 = A + B\phi \sin \phi + C \cos 2\phi, \quad (4.97)$$

con las constantes A, B y C por determinar. Entonces, el lado derecho de la ecuación diferencial cumple $u_1'' + u_1 = A + 2B \cos \phi - 3C \cos 2\phi$ y se sustituye en (4.96). Así, usando la identidad $\cos^2 \phi = \frac{1 + \cos 2\phi}{2}$, se tiene

$$A + 2B \cos \phi - 3C \cos 2\phi = -\frac{c^2 \alpha}{3h^2} (1 + e \cos \phi) + \frac{c^2 \alpha \mu}{3h^4} \left(1 + 2e \cos \phi + e^2 \frac{1 + \cos 2\phi}{2} \right),$$

lo que permite fijar las constantes

$$\begin{aligned} A &= -\frac{c^2 \alpha^2}{3h^2} + \frac{c^2 \alpha^2 \mu}{3h^4} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right), \\ B &= \frac{1}{2} \left(-\frac{c^2 \alpha e}{3h^2} + \frac{2}{3} \frac{c^2 \alpha^2 \mu e}{h^4} \right) \quad \text{y} \\ C &= -\frac{1}{3} \left(\frac{c^2 \alpha^2 \mu e^2}{6h^4} \right), \end{aligned} \quad (4.98)$$

por lo tanto, la solución para u_1 es

$$u_1 = -\frac{c^2\alpha^2}{3h^2} + \frac{c^2\alpha^2\mu}{3h^4} \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + \left(-\frac{c^2\alpha e}{6h^2} + \frac{c^2\alpha^2\mu e}{3h^4}\right) \phi \sin \phi - \left(\frac{c^2\alpha^2\mu e^2}{18h^4}\right) \cos 2\phi. \quad (4.99)$$

Debido a que las correcciones constante y de la forma $\cos 2\phi$ no son acumulativas para más de una revolución en en ángulo, se considera únicamente la corrección de la forma $\phi \sin \phi$, entonces

$$u_1 = \left(-\frac{c^2\alpha e}{6h^2} + \frac{c^2\alpha^2\mu e}{3h^4}\right) \phi \sin \phi. \quad (4.100)$$

Con esta ecuación, junto con la solución de orden cero, la ecuación de movimiento es, como se propuso en (4.91)

$$u = \frac{\mu}{h^2} \left[1 + e \cos \phi + \varepsilon \left(-\frac{c^2\alpha}{6h^2} + \frac{c^2\alpha^2\mu}{3h^4}\right) e\phi \sin \phi\right]. \quad (4.101)$$

Ahora, en orden de reescribir la ecuación y calcular la precesión de la órbita, se define $\delta_{3/2} \equiv -\frac{c^2\alpha}{6h^2} + \frac{c^2\alpha^2\mu}{3h^4}$, donde $\delta_{3/2}$ es un parámetro pequeño ($\sim 10^{-14}$). En términos de dicho parámetro

$$u = \frac{\mu}{h^2} (1 + e \cos \phi + \delta_{3/2} e\phi \sin \phi), \quad (4.102)$$

que puede escribirse como

$$u = \frac{\mu}{h^2} \{1 + e \cos[\phi(1 - \delta_{3/2})]\}, \quad (4.103)$$

a primer orden en $\delta_{3/2}$, donde la corrección aparece como un término extra en ángulo. Entonces se escribe el argumento del coseno para un periodo completo y se despeja el ángulo ϕ

$$\phi_T \approx 2\pi(1 + \delta_{3/2}) = 2\pi + 2\pi \left(\frac{\alpha^2\mu^2}{h^4} - \frac{\mu\alpha}{2h^2}\right), \quad (4.104)$$

donde el término extra se identifica con la precesión de la órbita.

Al escribir dicha precesión Δ_ϕ en términos de las variables

$$\mu = GM \quad \text{y} \quad h^2 = GMa(1 - e^2), \quad (4.105)$$

el resultado es

$$\Delta_\phi = 2\pi \left[\frac{\alpha^2}{a^2(1 - e^2)^2} - \frac{\alpha}{2a(1 - e^2)} \right]. \quad (4.106)$$

Para la órbita de Mercurio, usando (4.45), se obtiene la precesión en términos de α

$$\Delta_\phi = 2.04 \times 10^{-21} \alpha^2 - 5.66 \times 10^{-11} \alpha, \quad (4.107)$$

y, finalmente, con la cota para las correcciones (4.47), α queda restringida por la desigualdad

$$|2.04 \times 10^{-21} \alpha^2 - 5.66 \times 10^{-11} \alpha| - 2\pi \times 10^{-12} \leq 0, \quad (4.108)$$

la cual, al sustituir la definición de α , resulta en la siguiente cota para el parámetro R_G

$$|R_G| \leq 0.11m. \quad (4.109)$$

4.2.2. Caso $d_u = 2$

Para este caso la fuerza (4.83) es

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left[1 - \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\alpha}{r^4} \right] \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.110)$$

y la ecuación diferencial a orden ϵ

$$u_1'' + u_1 = -\frac{c^2\alpha\mu}{3h^4}(1 + e \cos \phi)^2 + \frac{c^2\alpha^2\mu^3}{3h^8}(1 + e \cos \phi)^4. \quad (4.111)$$

Bajo los mismos argumentos que en el caso anterior, se toman únicamente las contribuciones de la forma $\phi \sin \phi$ en la solución, por lo tanto

$$u_1 = \left(-\frac{c^2\alpha\mu}{3h^4} + \frac{2c^2\alpha^2\mu^3}{3h^8} + \frac{c^2\alpha^2\mu^3}{2h^8}e^2 \right) e\phi \sin \phi. \quad (4.112)$$

Junto con la solución a orden cero, la solución propuesta (4.91)

$$u = \frac{\mu}{h^2} \left[1 + e \cos \phi + \epsilon \left(-\frac{c^2\alpha}{3h^2} + \frac{2c^2\alpha^2\mu^2}{3h^6} + \frac{c^2\alpha^2\mu^2}{2h^6}e^2 \right) e\phi \sin \phi \right]. \quad (4.113)$$

Luego, para reescribir en la forma convencional, se define

$$\delta_2 \equiv \epsilon \left(-\frac{c^2\alpha}{3h^2} + \frac{2c^2\alpha^2\mu^2}{3h^6} + \frac{c^2\alpha^2\mu^2}{2h^6}e^2 \right), \quad (4.114)$$

donde $\delta_2 \ll 1$. De tal forma, la ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned} u &= \frac{\mu}{h^2} (1 + e \cos \phi + \delta_2 e\phi \sin \phi), \\ &= \frac{\mu}{h^2} \{ 1 + e \cos[\phi(1 - \delta_2)] \}, \end{aligned} \quad (4.115)$$

a primer orden en δ_2 .

Para encontrar la expresión para la precesión de la órbita, se toma el ángulo ϕ , igualando el argumento del coseno a una revolución completa 2π , entonces

$$\phi_T \simeq 2\pi + 2\pi\delta_2, \quad (4.116)$$

donde el segundo término es la precesión $\Delta\phi$. Sustituyendo el valor de δ_2

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\mu^2\alpha}{h^4} \left(-1 + \frac{2\mu^2\alpha}{h^4} + \frac{3\mu^2\alpha e^2}{h^4} \right), \quad (4.117)$$

y, en términos de los parámetros $\mu = GM$ y $h^2 = GMa(1 - e^2)$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\alpha}{a^2(1 - e^2)^2} \left[-1 + \frac{2\alpha}{a^2(1 - e^2)^2} + \frac{3e^2\alpha}{2a^2(1 - e^2)^2} \right]. \quad (4.118)$$

Con los valores numéricos reportados para la órbita de Mercurio, se tiene

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= 2.04 \times 10^{-21}\alpha(-1 + 6.50 \times 10^{-22}\alpha + 2.06 \times 10^{-23}\alpha), \\ &= -2.04 \times 10^{-21}\alpha + 1.37 \times 10^{-42}\alpha^2,\end{aligned}\tag{4.119}$$

y, por último, al considerar la cota para las contribuciones extra a la precesión del perihelio, se obtiene la desigualdad

$$|-2.04 \times 10^{-21}\alpha + 1.37 \times 10^{-42}\alpha^2| - 2\pi \times 10^{-12} \leq 0,\tag{4.120}$$

que se traduce en una cota para $\alpha = R_G^2$ y, por lo tanto,

$$|R_G| \leq 5.54 \times 10^4 \text{m}.\tag{4.121}$$

4.2.3. Caso $d_u = 3$

La fuerza (4.83) resulta ser

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left[1 - \frac{\alpha}{r^4} + \frac{\alpha}{r^8} \right] \hat{\mathbf{r}},\tag{4.122}$$

y la ec. diferencial para u_1

$$u_1'' + u_1 = -\frac{\alpha c^2 \mu^3}{3h^8} (1 + e \cos \phi)^4 + \frac{c^2 \alpha^2 \mu^7}{9h^{16}} (1 + e \cos \phi)^8,\tag{4.123}$$

tiene como solución

$$u_1 = -\frac{\alpha c^2 \mu^3}{3h^8} \left(2 + \frac{3}{2}e^2 \right) e\phi \sin \phi + \frac{c^2 \alpha^2 \mu^7}{3h^{16}} \left(4 + 21e^2 + \frac{35}{2}e^4 + \frac{35}{16}e^6 \right) e\phi \sin \phi,\tag{4.124}$$

al considerar únicamente los términos lineales en ϕ . Entonces, considerando la solución de orden cero, la solución completa (4.91) es

$$\begin{aligned}u &= \frac{\mu}{h^2} \left\{ 1 + e \cos \phi + \varepsilon \left[-\frac{\alpha c^2 \mu^2}{3h^6} \left(2 - \frac{3}{2}e^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{c^2 \alpha^2 \mu^6}{3h^{14}} \left(4 + 21e^2 + \frac{35}{2}e^4 + \frac{35}{16}e^6 \right) \right] e\phi \sin \phi \right\}.\end{aligned}\tag{4.125}$$

Luego, se define el parámetro

$$\delta_3 \equiv \varepsilon \left[-\frac{\alpha c^2 \mu^2}{3h^6} \left(2 + \frac{3}{2}e^2 \right) + \frac{c^2 \alpha^2 \mu^6}{3h^{14}} \left(4 + 21e^2 + \frac{35}{2}e^4 + \frac{35}{16}e^6 \right) \right],\tag{4.126}$$

que permite reescribir la ecuación de movimiento como

$$\begin{aligned}u &= \frac{\mu}{h^2} (1 + e \cos \phi + \delta_3 e\phi \sin \phi) \\ &= \frac{\mu}{h^2} \{ 1 + e \cos[\phi(1 - \delta_3)] \},\end{aligned}\tag{4.127}$$

a primer orden en δ_3 . Después, para obtener la ecuación para la precesión, se considera el ángulo ϕ para un periodo completo

$$\phi_T \simeq 2\pi + 2\pi\epsilon \left[-\frac{\alpha c^2 \mu^2}{3h^6} \left(2 + \frac{3}{2}e^2 \right) + \frac{c^2 \alpha^2 \mu^6}{3h^{14}} \left(4 + 21e^2 + \frac{35}{2}e^4 + \frac{35}{16}e^6 \right) \right], \quad (4.128)$$

por lo que el segundo término, identificado como la precesión, es

$$\Delta_\phi = 2\pi \left[-\frac{\mu^4}{h^8} \alpha \left(2 + \frac{3}{2}e^2 \right) + \frac{\mu^8}{h^{16}} \alpha^2 \left(4 + 21e^2 + \frac{35}{2}e^4 + \frac{35}{16}e^6 \right) \right]. \quad (4.129)$$

En términos de los parámetros característicos de las órbitas y con los valores numéricos reportados para la órbita de Mercurio

$$\begin{aligned} \Delta_\phi &= 2\pi \left[-\frac{\alpha}{a^4(1-e^2)^4} \left(2 + \frac{3}{2}e^2 \right) + \frac{\alpha^2}{a^8(1-e^2)^8} \left(4 + 21e^2 + \frac{35}{2}e^4 + \frac{35}{16}e^6 \right) \right], \\ &= -2.18 \times 10^{-43} \alpha + 5.49 \times 10^{-86} \alpha^2. \end{aligned} \quad (4.130)$$

Por último, con la cota (4.47) y la definición $\alpha = R_G^4$, se acota el valor del parámetro R_G

$$\begin{aligned} &|-2.18 \times 10^{-43} \alpha + 5.49 \times 10^{-86} \alpha^2| - 1 \times 10^{-12} \leq 0, \\ &|R_G| \leq 4.68 \times 10^7 \text{ m}. \end{aligned} \quad (4.131)$$

4.2.4. Caso $d_u = 4$

En este caso, la fuerza (4.83) es

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left[1 - \frac{\alpha}{r^6} + \frac{\alpha}{r^{12}} \right] \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.132)$$

la ecuación diferencial, a primer orden en ϵ , resulta ser

$$u_1'' + u_1 = -\frac{c^2 \alpha \mu^5}{3h^{12}} (1 + e \cos \phi)^6 + \frac{c^2 \alpha^2 \mu^{11}}{3h^{24}} (1 + e \cos \phi)^{12} \quad (4.133)$$

y la solución, con contribuciones lineales en ϕ

$$\begin{aligned} u_1 &= \left[-\frac{c^2 \alpha \mu^5}{3h^{12}} \left(3 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{c^2 \alpha^2 \mu^{11}}{3h^{24}} \left(6 + \frac{165}{2}e^2 + \frac{15}{2}e^4 + \frac{3465}{16}e^6 + \frac{3465}{64}e^8 + \frac{693}{256}e^{10} \right) \right] e\phi \sin \phi. \end{aligned} \quad (4.134)$$

De lo anterior, junto con la ecuación de secciones cónicas, la ecuación de movimiento (4.91) es

$$\begin{aligned} u &= \frac{\mu}{h^2} \left\{ 1 + e \cos \phi + \epsilon \left[-\frac{c^2 \alpha \mu^4}{3h^{10}} \left(3 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{c^2 \alpha^2 \mu^{10}}{3h^{22}} \left(6 + \frac{165}{2}e^2 + \frac{15}{2}e^4 + \frac{3465}{16}e^6 + \frac{3465}{64}e^8 + \frac{693}{256}e^{10} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Luego, para escribir de una forma conveniente, se define el parámetro

$$\delta_4 \equiv \varepsilon \left[-\frac{c^2 \alpha \mu^4}{3h^{10}} \left(3 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 \right) + \frac{c^2 \alpha^2 \mu^{10}}{3h^{22}} \left(6 + \frac{165}{2}e^2 + \frac{15}{2}e^4 + \frac{3465}{16}e^6 + \frac{3465}{64}e^8 + \frac{693}{256}e^{10} \right) \right], \quad (4.136)$$

por lo que la ecuación de movimiento puede escribirse en la forma convencional

$$\begin{aligned} u &= \frac{\mu}{h^2} (1 + e \cos \phi + \delta_4 e \phi \sin \phi), \\ &= \frac{\mu}{h^2} \{1 + e \cos[\phi(1 - \delta_4)]\}, \end{aligned} \quad (4.137)$$

y la precesión, al considerar un periodo completo para el argumento del coseno

$$\begin{aligned} \Delta_\phi &= 2\pi \left[-\frac{\alpha \mu^6}{3h^{12}} \left(3 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 \right) + \frac{\alpha^2 \mu^{12}}{3h^{24}} \left(6 + \frac{165}{2}e^2 + \frac{15}{2}e^4 + \frac{3465}{16}e^6 + \frac{3465}{64}e^8 + \frac{693}{256}e^{10} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.138)$$

Finalmente, la precesión se reescribe en términos de las variables (4.42) y se acota la contribución extra con la contribución de Relatividad General y la observada experimentalmente, lo que resulta en la desigualdad

$$\begin{aligned} &\left| -\frac{\alpha}{a^6(1-e^2)^6} \left(3 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 \right) + \frac{\alpha^2}{a^{12}(1-e^2)^{12}} \left(6 + \frac{165}{2}e^2 + \frac{15}{2}e^4 + \frac{3465}{16}e^6 + \frac{3465}{64}e^8 + \frac{693}{256}e^{10} \right) \right| - 1 \times 10^{-12} \leq 0. \end{aligned} \quad (4.139)$$

Para la órbita de Mercurio, se tiene

$$|-14 \times 10^{-64} \alpha + 1.12 \times 10^{-128} \alpha^2| - 1 \times 10^{-12} \leq 0, \quad (4.140)$$

de donde se acotan los parámetros libres, usando $\alpha = R_G^6$,

$$|R_G| \leq 9.44 \times 10^7 \text{ m}. \quad (4.141)$$

4.2.5. Sumario y análisis

Para cada valor de d_u , como se obtuvo en las secciones anteriores, la fuerza Newtoniana de origen entrópico con correcciones de Ungravity, y la cota para el parámetro R_G son las siguientes:

$d_u =$	Fuerza	Cota (m)
$\frac{3}{2}$	$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left[1 - \frac{R_G}{r} + \frac{R_G^2}{r^2} \right] \hat{\mathbf{r}}$	$ R_G \leq 0.11$
2	$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left[1 - \frac{R_G^2}{r^2} + \frac{R_G^4}{r^4} \right] \hat{\mathbf{r}}$	$ R_G \leq 5.54 \times 10^4$
3	$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left[1 - \frac{R_G^4}{r^4} + \frac{R_G^8}{r^8} \right] \hat{\mathbf{r}}$	$ R_G \leq 4.68 \times 10^7$
4	$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left[1 - \frac{R_G^6}{r^6} + \frac{R_G^{12}}{r^{12}} \right] \hat{\mathbf{r}}$	$ R_G \leq 9.44 \times 10^7$

Ahora, para visualizar el espacio de parámetros de la energía efectiva Λ_u y la masa M_u , se utiliza la relación

$$\Lambda_u = \frac{1}{R_G \pi} \left(\frac{M_p}{M_u} \right)^{1/(d_u-1)} \times \left(\frac{2(2-\alpha_0)}{\pi} \frac{\Gamma(d_u + \frac{1}{2})\Gamma(d_u - \frac{1}{2})}{\Gamma(2d_u)} \right)^{1/(2d_u-2)}, \quad (4.142)$$

donde $\alpha_0 = 1$ y la masa de Planck $M_p = 2.4 \times 10^{18}$ GeV. Se consideran unidades naturales ($c = 1, \hbar = 1$), por lo que se utiliza el factor de conversión $1\text{m} = 5 \times 10^{15}\text{GeV}^{-1}$. El espacio de parámetros para masas en el intervalo $10^3\text{GeV} \leq M_u \leq 10^{25}\text{GeV}$ se ve de la siguiente forma, con ambos ejes en unidades de MeV y en escala logarítmica.

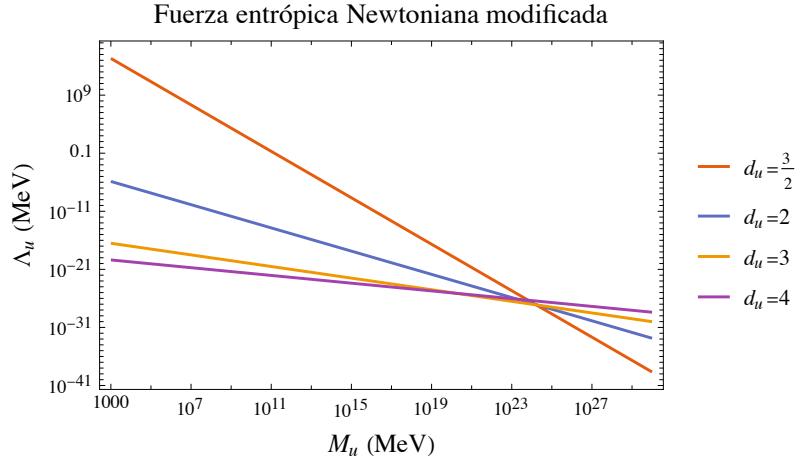


FIGURA 4.2: Espacio de parámetros con cotas para la precesión del perihelio de Mercurio a partir de una fuerza Newtoniana de origen entrópico, con modificaciones de Ungravity.

4.3. Redshift gravitacional a partir de ecuaciones clásicas modificadas

A partir de la ecuación del corrimiento al rojo gravitacional

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{\phi_1}{c^2} - \frac{\phi_2}{c^2}, \quad (4.143)$$

y utilizando el potencial propuesto en *Goldberg Nath, 2008*

$$\phi(r) = \frac{-m_1 m_2 G}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r} \right)^{2du-2} \right], \quad (4.144)$$

se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\nu}{\nu} &= \frac{-GM}{c^2 r_1} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r_1} \right)^{2du-2} \right] + \frac{GM}{c^2 r_2} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r_2} \right)^{2du-2} \right] \\ &= \frac{GM}{c^2} \left[\frac{1}{r_2} + \frac{R_G^{2du-2}}{r_2^{2du-1}} - \frac{1}{r_1} - \frac{R_G^{2du-2}}{r_1^{2du-1}} \right]. \end{aligned} \quad (4.145)$$

Para los casos $d_u = \frac{3}{2}, 2, 3, 4$ se calcula la cota para el parámetro R_G , usando los datos del experimento Pound-Rebka

- Caso $d_u = 3/2$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{c^2} \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} + \frac{R_G}{r_2^2} - \frac{R_G}{r_1^2} \right]. \quad (4.146)$$

con los datos experimentales

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 4.43 \times 10^{-3} (1.11 \times 10^{-12} + 3.49 \times 10^{-19} R_G) \quad (4.147)$$

Notar que el primer término corresponde a lo obtenido por Relatividad General para el experimento considerado. Con el fin de acotar la contribución extra, proveniente del modelo de Ungravity, se considera únicamente el segundo término, que debe cumplir la desigualdad

$$\left| \frac{\Delta\nu}{\nu} \right| = \left| 1.54^{-21} R_G \right| \leq 6 \times 10^{-3}. \quad (4.148)$$

Por lo tanto, la cota para el parámetro de longitud R_G

$$|R_G| \leq 3.88 \times 10^{18} \text{m} \quad (4.149)$$

- Caso $d_u = 2$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{c^2} \left[\frac{1}{r_2} + \frac{R_G^2}{r_2^3} - \frac{1}{r_1} - \frac{R_G^2}{r_1^3} \right], \quad (4.150)$$

con los datos del experimento resulta

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 4.43 \times 10^{-3} (1.11 \times 10^{-12} + 8.21 \times 10^{-26} R_G^2) \quad (4.151)$$

y al considerar únicamente la contribución de Ungravity, la cota para la contribución extra es

$$\left| \frac{\Delta u \nu}{\nu} \right| = |3.64 \times 10^{-28} R_G^2| \leq 6 \times 10^{-3}. \quad (4.152)$$

La cota sobre el parámetro de interés

$$|R_G| \leq 4.06 \times 10^{12} \text{m} \quad (4.153)$$

■ Caso $d_u = 3$

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{GM}{c^2} \left[\frac{1}{r_2} + \frac{R_G^a}{r_2^s} - \frac{1}{r_1} - \frac{R_l^4}{r_1^s} \right], \quad (4.154)$$

con los datos experimentales

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = 4.43 \times 10^{-3} (1.11 \times 10^{-12} + 3.37 \times 10^{-39} R_G^4), \quad (4.155)$$

que como contribución extra debe cumplir la desigualdad

$$\left| \frac{\Delta \nu}{\nu} \right| = |1.49 \times 10^{-41} R_G^4| \leq 6 \times 10^{-3}. \quad (4.156)$$

La cota

$$|R_G| \leq 4.47 \times 10^9 \text{m} \quad (4.157)$$

■ Caso $d_u = 4$ Por último

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{GM}{c^2} \left[\frac{1}{r_2} + \frac{R_G^6}{r_2^7} - \frac{1}{r_1} + \frac{R_G^6}{r_1^7} \right], \quad (4.158)$$

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = 4.43 \times 10^{-3} (1.11 \times 10^{-12} + 1.16 \times 10^{-52} R_G^6). \quad (4.159)$$

Al acotar con los datos experimentales, debe cumplir con la ecuación

$$\left| \frac{\Delta \nu}{\nu} \right| = |5.16 \times 10^{-55} R_G^6| \leq 6 \times 10^{-3}. \quad (4.160)$$

por lo tanto la cota

$$|R_G| \leq 4.76 \times 10^9 \text{m} \quad (4.161)$$

Las cotas para cada caso presentado anteriormente se utilizan en la relación 4.81 para visualizar el espacio de parámetros de la energía efectiva Λ_u en función de la masa efectiva M_u , con ambos ejes en escala logarítmica.

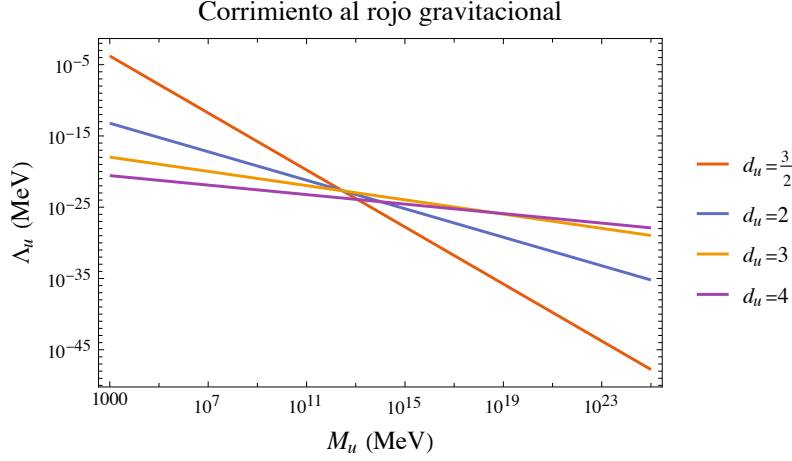


FIGURA 4.3: Espacio de parámetros con cotas para el experimento Pound-Rebka, a partir de un potencial Newtoniano modificado

De manera análoga al caso anterior, tomando la aproximación para la fuerza

$$F \approx \frac{GMm}{r} \left\{ 1 - \Gamma_u \left(\frac{R}{r} \right)^{2d_u-2} + \left[\Gamma_u \left(\frac{R}{r} \right) \right]^{2d_u-2} \right\}, \quad (4.162)$$

propuesta como modificación a la fuerza Newtoniana en Nicolini, 2010.

Con el fin de homologar la notación, se utiliza el cambio $R_G^{2d_u-2} = \Gamma_u R^{2d_u-2}$. Luego, relacionando la fuerza con el potencial gravitacional mediante el potencial, como $F = -\nabla\phi$, se tiene

$$\phi = -\frac{GM}{r} \left[-1 + \frac{R_G^{2d_u-2}}{(2d_u-1)r^{2d_u-2}} - \frac{(R_G^{2d_u-2})^2}{(4d_u-3)r^{4d_u-4}} \right], \quad (4.163)$$

utilizando la condición de frontera $\phi_0 = 0$.

a partir del potencial anterior, junto con la ecuación para el corrimiento al rojo (4.143), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{GM}{c^2} & \left[-\frac{1}{r_1} + \frac{R_G^{2d_u-2}}{(2d_u-1)r_1^{2d_u-1}} - \frac{R_G^{2d_u-2}}{(4d_u-3)r_1^{4d_u-3}} + \frac{1}{r_2} \right. \\ & \left. - \frac{R_G^{2d_u-2}}{(2d_u-1)r_2^{2d_u-1}} + \frac{R_G^{2d_u-2}}{(4d_u-3)r_2^{4d_u-3}} \right]. \end{aligned} \quad (4.164)$$

De la ecuación anterior, se analizan los casos para d_u fijo, con los valores $d_u = 1, 2, 3$ y 4 y se resuelve para el parámetro R_G , al comparar con el experimento Poud - Rebka.

- Caso $d_u = \frac{3}{2}$ En este caso, el corrimiento al rojo es

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{c^2} \left[+\frac{1}{r_1} - \frac{R_G}{2r_1^2} + \frac{R_G^2}{3r_1^3} - \frac{1}{r_2} + \frac{R_G}{2r_2^2} - \frac{R_G^2}{3r_2^3} \right]. \quad (4.165)$$

Luego, sustituyendo los datos del experimento, se tiene

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 4.43 \times 10^{-3} (-1.11 \times 10^{-12} + 1.74 \times 10^{-19} R_G - 2.74 \times 10^{-26} R_G^2). \quad (4.166)$$

Entonces, usando la cota del experimento mencionado, debe cumplirse la ecuación

$$\left| \frac{\Delta\nu}{\nu} \right| = |-4.93 \times 10^{-12} + 17.73 \times 10^{-22} R_G - 1.21 \times 10^{-28} R_G^2| - 6 \times 10^{-3} \leq 0. \quad (4.167)$$

Nótese que el primer término del lado derecho corresponde a la contribución proveniente de Relatividad General. Al resolver la ecuación anterior para R_G , se tiene la cota

$$|R_G| \leq 7.03 \times 10^{12} \text{m}. \quad (4.168)$$

■ Caso $d_u = 2$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{c^2} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{R_G^2}{3r_1^3} + \frac{R_G^4}{5r_1^5} - \frac{1}{r_2} + \frac{R_G^2}{3r_2^3} - \frac{R_G^4}{5r_2^5} \right]. \quad (4.169)$$

Luego, al introducir los datos del experimento y acotar la contribución extra

$$\left| \frac{\Delta\nu}{\nu} \right| = |-4.9279 \times 10^{-15} + 1.2141 \times 10^{-28} R_G^2 - 2.9912 \times 10^{-12} R_G^4| - 6 \times 10^{-3} \leq 0 \quad (4.170)$$

y al resolver para R_G , resulta

$$|R_G| \leq 6.69 \times 10^9 \text{ m}. \quad (4.171)$$

■ Caso $d_u = 3$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{c^2} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{RG^9}{5r_1^5} + \frac{R_G^8}{9} - \frac{1}{r_2} + \frac{R_G^9}{5r_2^5} - \frac{R_G^8}{9r_2^9} \right], \quad (4.172)$$

con la cota y los datos experimentales

$$\left| \frac{\Delta\nu}{\nu} \right| = |-4.9279 \times 10^{-15} + 12.9912 \times 10^{-42} R_G^4 - 1.8155 \times 10^{-69} R_G^8| - 6 \times 10^{-3} \leq 0, \quad (4.173)$$

por lo tanto

$$|R_G| \leq 2.06 \times 10^8 \text{ m}. \quad (4.174)$$

■ Caso $d_u = 4$ Por último, el corrimiento al rojo para $d_u = 4$

$$\Delta\nu = \frac{GM}{c^2} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{RG}{7r_1^7} + \frac{R_G^{12}}{13r_1^{13}} - \frac{1}{r_2} + \frac{R_G^6}{7r_2^7} - \frac{RG^{12}}{13r_2^{13}} \right] \quad (4.175)$$

resulta en a cota

$$\left| \frac{\Delta\nu}{\nu} \right| = |-4.93 \times 10^{-15} + 7.37 \times 10^{-56} R_G^6 - 1.10 \times 10^{-96} R_G^{12}| - 6 \times 10^{-3} \leq 0, \quad (4.176)$$

da como resultado

$$|R_G| \leq 6.47 \times 10^7 \text{ m.} \quad (4.177)$$

De los casos anteriores, se obtiene el espacio de parámetros, en escala logarítmica, $M_u - \Lambda_u$, usando la ecuación 4.81.

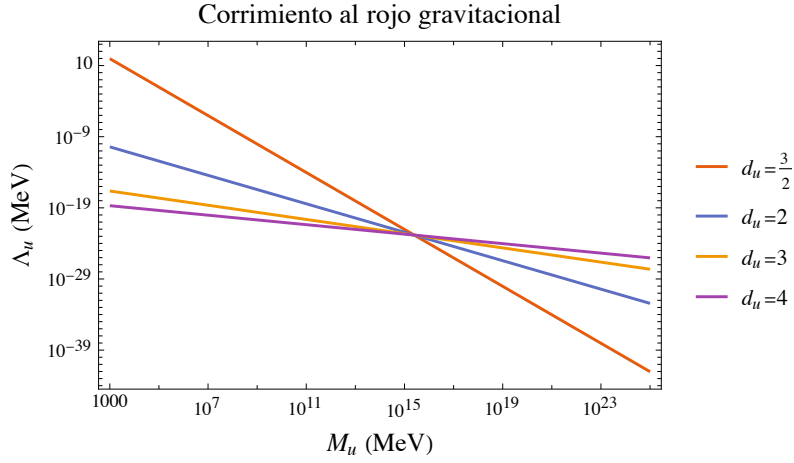


FIGURA 4.4: Espacio de parámetros con cotas para el experimento Pund-Rebka, a partir de una fuerza entrópica Newtoniana modificada.

4.3.1. Resultados

Las cotas para el parámetro de longitud del modelo Ungravity, R_G , obtenidas para el experimento Pound-Rebka usando ecuaciones clásicas modificadas, se muestran a continuación

d_u	Cota potencial	Cota fuerza entrópica
$\frac{3}{2}$	$3.88 \times 10^{18} \text{ m}$	$7.03 \times 10^{12} \text{ m}$
2	$4.06 \times 10^{12} \text{ m}$	$6.69 \times 10^9 \text{ m}$
3	$4.47 \times 10^9 \text{ m}$	$2.06 \times 10^8 \text{ m}$
4	$4.76 \times 10^9 \text{ m}$	$6.47 \times 10^7 \text{ m}$

CUADRO 4.1

Como puede notarse, la cota obtenida para el valor $d_u = 3/2$ es la de mayor orden de magnitud en ambos casos y disminuye su valor al aumentar d_u , a excepción de los casos $d_u = 3$ y $d_u = 4$ en el caso del potencial modificado. Los espacios de parámetros, junto con el obtenido a partir de una métrica modificada, serán comparados al final del trabajo.

Capítulo 5

Pruebas clásicas de RG a partir de una métrica con modificaciones de Ungravity

5.1. Métrica modificada

Como se menciona en el capítulo 2, en el artículo Gaete, Helaÿel-Neto y Spallucci, 2010, se muestran las siguientes correcciones a la métrica de Schwarzschild, provenientes de Ungravity.

$$g_{rr}^{-1} = -g_{00} = 1 - V_N(r) \left[1 + \Gamma_u \left(\frac{R_*}{r} \right)^{2d_u-2} \right], \quad (5.1)$$

donde $-V_N(r)$ es el potencial gravitacional Newtoniano y las variables características del modelo son

$$\Gamma_u = \frac{2}{\pi^{2d_u-1}} \frac{\Gamma(d_u - \frac{1}{2})\Gamma(d_u + \frac{1}{2})}{\Gamma(2d_u)} \quad \text{y} \quad R_* = \frac{1}{\Lambda_u} \left(\frac{M_P}{M_u} \right)^{\frac{1}{d_u-1}}. \quad (5.2)$$

Con el fin de homologar la notación con la de las formulaciones consideradas en secciones anteriores, se define

$$R_G^{2d_u-2} \equiv \Gamma_u (R_*)^{2d_u-2}, \quad (5.3)$$

y, con ello, la métrica de Swarzschild modificada se escribe de la siguiente forma, al considerar el potencial Newtoniano $V_N(r) = \frac{GM}{r}$ y la ecuación (5.1), donde además se toma $c = 1$,

$$\begin{cases} g_{rr}^{-1} = -g_{00} = 1 - \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r} \right)^{2d_u-2} \right], \\ g_{\theta\theta} = r^2, \\ g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta. \end{cases} \quad (5.4)$$

Ahora, para resolver el problema de órbitas planetarias, se considera una partícula de prueba en el vacío, cuya trayectoria es definida por el espacio deformado por una distribución de masa esférica. Entonces, se escribe la ecuación de geodésicas para

una partícula tipo tiempo como

$$\begin{aligned} 2K &= 1, \\ &= \left(1 - \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_u-2}\right]\right) \dot{t}^2 \\ &\quad - \left(1 - \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_u-2}\right]\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2, \end{aligned} \quad (5.5)$$

en unidades de $c = 1$ por simplicidad en la notación.

Al introducir la relación anterior en la ecuación de geodésicas escrita como la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial K}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\alpha} = 0, \quad (5.6)$$

se obtienen las siguientes cantidades conservadas y ecuaciones de movimiento:

- Para $\alpha = 0$,

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial K}{\partial \dot{t}} = \frac{d}{d\tau} \left\{ \left(1 - \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_u-2}\right]\right) \dot{t} \right\} = 0, \quad (5.7)$$

lo que implica la cantidad conservada

$$\left(1 - \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_u-2}\right]\right) \dot{t} = cte. \quad (5.8)$$

- Para $\alpha = 1$, la ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} &\left[-\frac{GM}{r^2} (1 - d_u) \left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_u-2} + \frac{GM}{2r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_u-2}\right] \right] \times \\ &\left[\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_u-2}\right]\right)^{-2} \dot{r}^2 \right] - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \\ &+ \frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_u-2}\right]\right)^{-1} \dot{r} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

- Para $\alpha = 2$,

$$-r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 + \frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) = 0, \quad (5.10)$$

entonces

$$-r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 + 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0. \quad (5.11)$$

- Para $\alpha = 3$,

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0, \quad (5.12)$$

que implica la cantidad conservada

$$r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = cte. \quad (5.13)$$

Para $\theta = \frac{\pi}{2}$, la ecuación anterior puede identificarse con la cantidad conservada de momento angular por unidad de masa, $h = r^2\dot{\phi}$, al igual que en el problema de Kepler. A su vez, al fijar el valor de θ , la ecuación (5.11) implica que la primera y segunda derivadas de θ se anulan. Por ello, se fija dicho valor del ángulo, lo que resulta en ecuaciones sin dependencia en θ y permite describir el movimiento de la partícula sobre un plano (para ello deben anularse las demás derivadas de θ).

Así, la ecuación (5.78) se reescribe como

$$2K = \left(1 - \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_u-2}\right]\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_u-2}\right]\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 = 1, \quad (5.14)$$

y, al definir la cantidad conservada (5.8) como

$$\left(1 - \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_u-2}\right]\right) \dot{t} \equiv a, \quad (5.15)$$

la ecuación de la geodésica es

$$2K = a^2 \left(1 - \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_u-2}\right]\right)^{-1} - \left(1 - \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_u-2}\right]\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 = 1. \quad (5.16)$$

Al igual que en el problema sin correcciones, la ecuación anterior se escribe en términos de la cantidad conservada h y se utiliza el cambio de variable $u = 1/r$, lo que implica reemplazar las variables $\dot{r}$ y $\dot{\phi}$ mediante las relaciones $h = r^2\dot{\phi}$ y $\dot{r} = -h \frac{du}{d\phi}$.

Entonces la ecuación de la geodésica toma la forma

$$a^2 \left(1 - GMu \left[1 + (uR_G)^{2d_u-2}\right]\right)^{-1} - \left(1 - GMu \left[1 + (uR_G)^{2d_u-2}\right]\right)^{-1} h^2 \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - h^2 u^2 = 1. \quad (5.17)$$

En orden de obtener la ecuación diferencial para la trayectoria de la partícula, se despejan, del lado izquierdo de la ecuación, los términos usuales que conducen a la obtención de la ecuación de Binet (de la forma $\frac{du}{d\phi} + u$). De ello resulta en un término constante del lado derecho y términos que pueden agruparse al factorizar el elemento entre corchetes. La ecuación resultante es

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{a^2 - 1}{h^2} + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{u}{h^2} + u^3\right) \left[1 + (uR_G)^{2d_u-2}\right]. \quad (5.18)$$

Luego, al derivar con respecto de ϕ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{2} \left\{ GM \left(\frac{1}{h^2} + 3u^2 \right) \left[1 + (uR_G)^{2d_u-2} \right] \right. \\ \left. + GM \left(\frac{u}{h^2} + u^3 \right) (2d_u - 2) u^{2d_u-3} R_G^{2d_u-2} \right\}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

y al reagrupar los términos del lado derecho, se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{2} \left[\frac{1}{h^2} + 3u^2 + \frac{2d_u - 1}{h^2} (uR_G)^{2d_u-2} + (2d_u + 1) R_G^{2d_u-2} u^{2d_u} \right]. \quad (5.20)$$

Finalmente, definiendo $\mu \equiv \frac{GM}{2}$, la ecuación puede escribirse como

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \left[1 + 3u^2 h^2 + (2d_u - 1) (uR_G)^{2d_u-2} + (2d_u + 1) h^2 R_G^{2d_u-2} u^{2d_u} \right]. \quad (5.21)$$

La ecuación diferencial obtenida tiene la forma de la ecuación de Binet, con contribuciones extra, provenientes del modelo de Ungravity.

A continuación, se muestra el desarrollo de las pruebas clásicas de Relatividad General: Precesión del perihelio de Mercurio, deflexión de la luz y corrimiento al rojo gravitacional, haciendo uso de la métrica y ecuaciones determinadas en esta sección.

5.2. Precesión del perihelio de Mercurio a partir de métrica modificada

Con un procedimiento análogo al de los casos de órbitas planetarias resueltos en secciones anteriores, la ecuación diferencial (5.21) se resuelve mediante un método perturbativo, al ser las correcciones del orden del inverso del radio. Retomando las unidades en que $c \neq 1$, se toma como parámetro de expansión

$$\varepsilon \equiv \frac{3\mu^2}{c^2 h^2} = \frac{3}{c^2 h^2} \left(\frac{GM}{2c^2} \right)^2, \quad (5.22)$$

que al introducir los datos para el sistema solar resulta ser un coeficiente pequeño. En términos de dicho parámetro, la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned} u'' + u = \frac{\mu}{h^2} \left\{ 1 + \varepsilon \left[\frac{u^2 h^4 c^2}{\mu^2} + \frac{c^2 h^2}{3\mu^2} (2d_u - 1) (uR_G)^{2d_u-2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{c^2 h^4}{3\mu^2} (2d_u + 1) R_G^{2d_u-2} u^{2d_u} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

donde u' representa la derivada con respecto de ϕ .

Luego, se propone la solución a primer orden

$$u = u_0 + \varepsilon u_1, \quad (5.24)$$

de la cual pueden identificarse dos ecuaciones, al sustituir del lado derecho en (5.23), una de orden ε^0 y otra de orden ε .

La ecuación a orden cero, ecuación de Binet sin correcciones,

$$u_0'' + u_0 = \frac{\mu}{h^2}, \quad (5.25)$$

tiene como solución la ecuación de secciones cónicas. Por otro lado, la ecuación de orden ε queda en términos de la solución u_0

$$u_1'' + u_1 = \frac{\mu}{h^2} \left[\frac{h^4 c^2}{\mu^2} u_0^2 + \frac{c^2 h^2}{3\mu^2} (2d_u - 1) (u_0 R_G)^{2d_u-2} + \frac{c^2 h^4}{3\mu^2} (2d_u + 1) R_G^{2d_u-2} u_0^{2d_u} \right]. \quad (5.26)$$

Al introducir en esta ecuación la solución conocida, se obtiene la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} u_1'' + u_1 = & \frac{c^2 \mu}{h^2} (1 + e \cos \phi)^2 + \frac{c^2 \mu^{2d_u-3}}{3h^{4d_u-4}} (2d_u - 1) R_G^{2d_u-2} (1 + e \cos \phi)^{2d_u-2} \\ & + \frac{c^2 \mu^{2d_u-1}}{3h^{4d_u-2}} (2d_u + 1) R_G^{2d_u-2} (1 + e \cos \phi)^{2d_u}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

donde puede identificarse, en el primer término del lado derecho, la contribución usual obtenida de Relatividad General para el problema de órbitas planetarias.

Con el fin de optimizar la notación en el desarrollo siguiente, se define

$$\alpha \equiv (2d_u - 1) R_G^{2d_u-2} \quad \text{y} \quad \alpha' \equiv (2d_u + 1) R_G^{2d_u-2}, \quad (5.28)$$

entonces, la ecuación diferencial de orden ε es

$$\begin{aligned} u_1'' + u_1 = & \frac{c^2 \mu}{h^2} (1 + e \cos \phi)^2 + \frac{c^2 \mu^{2d_u-3}}{3h^{4d_u-4}} \alpha (1 + e \cos \phi)^{2d_u-2} \\ & + \frac{c^2 \mu^{2d_u-1}}{3h^{4d_u-2}} \alpha' (1 + e \cos \phi)^{2d_u}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

En lo sucesivo, se resuelve el problema de la precesión del perihelio para los casos de dimensión $d_u = \frac{3}{2}, 2, 3$ y 4. Con la ecuación de movimiento para cada caso, que se obtiene al resolver la ecuación diferencial (5.21) (usando el método y solución propuestos en esta sección) con el software *Mathematica*, se identifica la precesión en la órbita, al mantener únicamente las contribuciones lineales en el ángulo ϕ y se obtiene el valor para la órbita de Mercurio, considerando los valores

$$a = 5.7909 \times 10^{10} \text{ m}, \quad e = 0.2056 \quad \text{y} \quad GM = 1.327 \times 10^{20} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}, \quad (5.30)$$

para el semieje mayor, la excentricidad y el producto de la constante de gravitación universal con la masa del sol, respectivamente.

Finalmente, con la cota para las contribuciones extras a la precesión,

$$|\Delta_\phi| = |\Delta_{obs} - \Delta_{RG}| \leq 2\pi \times 10^{-12} \frac{\text{rad}}{\text{rev}}, \quad (5.31)$$

se obtienen los valores máximos para el parámetro de longitud del modelo de Ungravity, R_G , para cada valor de d_u .

5.2.1. Caso $d_u = \frac{3}{2}$

La ecuación (5.29) para este caso es

$$u_1'' + u_1 = \frac{c^2 \mu^2}{h^2} (1 + e \cos \phi)^2 + \alpha \frac{c^2}{3h^2} (1 + e \cos \phi) + \alpha' \frac{c^2 \mu^2}{3h^4} (1 + e \cos \phi)^3. \quad (5.32)$$

De los términos de la solución, se consideran únicamente las contribuciones lineales en el ángulo, que tienen la forma $\phi \sin \phi$, pues son los únicos términos de corrección que aumentan su valor para cada revolución. La solución es

$$u_1 = \left(\frac{\alpha c^2}{6h^2} + \frac{c^2 \mu}{h^2} + \frac{\alpha' c^2 \mu^2}{2h^4} + \frac{\alpha' c^2 \mu^2}{8h^4} e^2 \right) e \phi \sin \phi, \quad (5.33)$$

por lo que la ecuación completa, considerando la solución propuesta (5.24) y la ecuación de secciones cónicas, tiene la forma

$$u = \frac{\mu}{h^2} (1 + e \cos \phi) + \varepsilon \left(\frac{\alpha c^2}{6h^2} + \frac{c^2 \mu}{h^2} + \frac{\alpha' c^2 \mu^2}{2h^4} + \frac{\alpha' c^2 \mu^2}{8h^4} e^2 \right) e \phi \sin \phi, \quad (5.34)$$

y, sustituyendo el valor de ε , la ecuación de movimiento es

$$u = \frac{\mu}{h^2} \left[1 + e \cos \phi + \left(\frac{\alpha \mu}{2h^2} + \frac{3\mu^2}{h^2} + \frac{3\alpha' \mu^3}{2h^4} + \frac{3\alpha' \mu^3 e^2}{8h^4} \right) e \phi \sin \phi \right]. \quad (5.35)$$

Luego, con el fin de escribir la ecuación anterior en la forma estándar, donde aparece la corrección como un término extra en el ángulo, se define el parámetro

$$\delta_{3/2} \equiv \frac{\alpha \mu}{2h^2} + \frac{3\mu^2}{h^2} + \frac{3\alpha' \mu^3}{2h^4} + \frac{3\alpha' \mu^3 e^2}{8h^4} \ll 1, \quad (5.36)$$

lo que permite escribir $\cos(\phi - \delta_{3/2}) \approx \cos \phi + \delta_{3/2} \phi \sin \phi$. Al identificar dicho término en la ecuación de movimiento, ésta puede escribirse en la forma

$$u = \frac{\mu}{h^2} \{ 1 + e \cos[\phi(1 - \delta_{3/2})] \}. \quad (5.37)$$

De lo anterior, se identifica la precesión del perihelio de la órbita, al tomar el argumento de la función coseno para un periodo completo 2π , donde el ángulo es

$$\phi_T(1 - \delta_{3/2}) = 2\pi, \quad (5.38)$$

entonces

$$\phi_T \approx 2\pi + 2\pi\delta_{3/2} \quad (5.39)$$

a primer orden en $\delta_{3/2}$. Por lo tanto la precesión, contribución extra en el ángulo ϕ_T , es

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\alpha \mu}{2h^2} + \frac{3\mu^2}{h^2} + \frac{3\alpha' \mu^3}{2h^4} + \frac{3\alpha' \mu^3 e^2}{8h^4}. \quad (5.40)$$

Tal expresión, en términos de las variables astronómicas M , a y e , mediante las relaciones

$$h^2 = GMa(1 - e^2) \quad \text{y} \quad \mu \equiv \frac{GM}{2c^2}, \quad (5.41)$$

se escribe como

$$\Delta\phi = 2\pi \left(\frac{\alpha}{4a(1-e^2)} + \frac{3GM}{4c^2a(1-e^2)} + \frac{3GM\alpha'}{16a^2c^2(1-e^2)^2} + \frac{3GM\alpha'e^2}{64a^2c^2(1-e^2)^2} \right). \quad (5.42)$$

Entonces, para la órbita de Mercurio, utilizando los valores numéricos (5.30) y las definiciones (5.28), que para este caso cumplen $\alpha = 2R_G$ y $\alpha' = 4R_G$, la precesión resulta ser

$$\Delta\phi = 2\pi(9.01 \times 10^{-12}R_G + 1.99 \times 10^{-8} + 3.60 \times 10^{-19}R_G + 3.80 \times 10^{-21}R_G). \quad (5.43)$$

Finalmente, al reagrupar los términos que contienen el parámetro R_G y utilizar la cota (5.31) para las nuevas contribuciones a la precesión del perihelio, se obtiene la desigualdad

$$|9.01 \times 10^{-12}R_G + 1.99 \times 10^{-8}| \leq 1 \times 10^{-12}. \quad (5.44)$$

Nótese, al revisar las secciones anteriores, que el segundo término en el valor absoluto proviene de la contribución usual de Relatividad General. Dado que en la cota utilizada ya se considera dicha contribución y que el principal interés es acotar el parámetro de Ungravity, se considera solo el primer término de corrección. Lo anterior restringe el valor de R_G , de modo que

$$|R_G| \leq 0.11\text{m}. \quad (5.45)$$

5.2.2. Caso $d_u = 2$

Para este valor de la dimensión, la ecuación diferencial a orden ε (5.29) es

$$u_1'' + u_1 = \frac{c^2\mu}{h^2}(1 + e \cos \phi)^2 + \frac{c^2\mu}{3h^4}\alpha(1 + e \cos \phi)^2 + \frac{c^2\mu^3}{3h^6}\alpha'(1 + e \cos \phi)^4, \quad (5.46)$$

que al resolver y considerar únicamente las contribuciones lineales en ϕ (ver los casos anteriores) tiene como solución

$$u_1 = \left[\frac{c^2\mu}{h^2} \left(1 + \frac{\alpha}{3h^2} \right) + \frac{2c^2\mu^3}{3h^6}\alpha' + \frac{c^2\mu^3}{2h^6}e^2\alpha \right] e\phi \sin \phi. \quad (5.47)$$

Entonces, junto con la solución a orden cero, la ecuación de movimiento se escribe como

$$\begin{aligned} u &= \frac{\mu}{h^2}(1 + e \cos \phi) + \varepsilon \left[\frac{c^2\mu}{h^2} \left(1 + \frac{\alpha}{3h^2} \right) + \frac{2c^2\mu^3}{3h^6}\alpha' + \frac{c^2\mu^3}{2h^6}e^2\alpha \right] e\phi \sin \phi, \\ &= \frac{\mu}{h^2} \left\{ 1 + e \cos \phi + \left[\frac{3\mu^2}{h^2} \left(1 + \frac{\alpha}{3h^2} \right) + \frac{2\mu^4}{h^6}\alpha' + \frac{3\mu^4e^2\alpha'}{2h^6} \right] e\phi \sin \phi \right\}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Dicha solución puede reescribirse en la forma estándar

$$u = \frac{\mu}{h^2} 1 + e \cos[\phi(1 - \delta_2)], \quad (5.49)$$

al definir el parámetro

$$\delta_2 \equiv \frac{3\mu^2}{h^2} \left(1 + \frac{\alpha}{3h^2} \right) + \frac{2\mu^4}{h^6}\alpha' + \frac{3\mu^4e^2\alpha'}{2h^6}, \quad (5.50)$$

que cumple con la condición $\delta_2 \ll 1$.

Ahora, con el fin de obtener una expresión para la precesión de las órbitas, se considera el argumento del coseno para un periodo completo 2π , de lo cual se obtiene el ángulo $\phi_T \approx 2\pi(1 + \delta_2)$. Después, al identificar la precesión con el término extra $2\pi\delta_2$, se tiene

$$\Delta_\phi = 2\pi \left[\frac{3\mu^2}{h^2} \left(1 + \frac{\alpha}{3h^2} \right) + \frac{2\mu^4}{h^6} \alpha' + \frac{3\mu^4 e^2 \alpha'}{2h^6} \right], \quad (5.51)$$

y, en términos de la ecuación (5.41), la expresión para la precesión toma la forma

$$\Delta_\phi = 2\pi \left(\frac{3GM}{4a(1-e^2)c^2} + \frac{3R_G^2}{4a^2(1-e^2)^2} + \frac{5GMR_G^2}{8a^3(1-e^2)^3c^2} + \frac{15GMe^2R_G^2}{32a^3(1-e^2)3c^2} \right). \quad (5.52)$$

Para la órbita de Mercurio, con los valores (5.30),

$$\Delta_\phi = 2\pi(1.99 \times 10^{-8} + 2.44 \times 10^{-22}R_G^2 + 5.41 \times 10^{-30}R_G^2 + 1.71 \times 10^{-31}R_G^2), \quad (5.53)$$

la expresión depende únicamente del parámetro R_G . Entonces

$$\Delta_\phi = 2\pi(2.44 \times 10^{-22})R_G^2, \quad (5.54)$$

donde, al igual que en el caso anterior, se considera únicamente la contribución de Ungravity, pues la contribución de Relatividad General está contenida en la cota utilizada, $|\Delta_\phi| \leq |\Delta_{RG} - \Delta_{obs}| \leq 2\pi \times 10^{-12} \frac{\text{rad}}{\text{rev}}$. Por lo tanto, la cota para el parámetro de longitud de Ungravity es

$$|R_G| \leq 6.40 \times 10^4 \text{m}. \quad (5.55)$$

5.2.3. Caso $d_u = 3$

En este caso la ecuación diferencial a orden ε (5.29) es

$$u_1'' + u_1 = \frac{c^2\mu}{h^2}(1 + e \cos \phi)^2 + \frac{c^2\mu^3}{3h^8}\alpha(1 + e \cos \phi)^4 + \frac{c^2\mu^5}{3h^{10}}\alpha'(1 + e \cos \phi)^6. \quad (5.56)$$

Las contribuciones a la solución, de la forma $\phi \sin \phi$, como se menciona en los casos anteriores, son

$$u_1 = \left[\frac{c^2\mu}{h^2} + \frac{c^2\mu^3\alpha}{h^8} \left(\frac{2}{3} + \frac{e^2}{2} \right) + \frac{c^2\mu^5\alpha'}{h^{10}} \left(1 + \frac{5e^2}{2} + \frac{5e^4}{8} \right) \right] e\phi \sin \phi, \quad (5.57)$$

entonces, junto con la solución a orden cero (ecuación de secciones cónicas), la solución propuesta (5.24) puede escribirse como

$$\begin{aligned} u &= \frac{\mu}{h^2}(1 + e \cos \phi) + \varepsilon \left[\frac{c^2\mu}{h^2} + \frac{c^2\mu^3\alpha}{h^8} \left(\frac{2}{3} + \frac{e^2}{2} \right) + \frac{c^2\mu^5\alpha'}{h^{10}} \left(1 + \frac{5e^2}{2} + \frac{5e^4}{8} \right) \right] e\phi \sin \phi, \\ &= \frac{\mu}{h^2} \left\{ 1 + e \cos \phi + \left[\frac{3\mu^2}{h^2} + \frac{3\mu^4\alpha}{h^8} \left(\frac{2}{3} + \frac{e^2}{2} \right) + \frac{3\mu^6\alpha'}{h^{10}} \left(1 + \frac{5e^2}{2} + \frac{5e^4}{8} \right) \right] e\phi \sin \phi \right\}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Luego, para escribir la ecuación de movimiento en la forma convencional, se define el parámetro

$$\delta_3 \equiv \frac{3\mu^2}{h^2} + \frac{3\mu^4\alpha}{h^8} \left(\frac{2}{3} + \frac{e^2}{2} \right) + \frac{3\mu^6\alpha'}{h^{10}} \left(1 + \frac{5e^2}{2} + \frac{5e^4}{8} \right), \quad (5.59)$$

pequeño para los órdenes del sistema solar. Ello permite escribir la ecuación de movimiento como

$$u = \frac{\mu}{h^2} \{1 + e \cos[\phi(1 - \delta_3)]\}. \quad (5.60)$$

Ahora, para encontrar la expresión para la precesión de la órbita, se fija el argumento de la función coseno a 2π (para un periodo completo) y se despeja el ángulo

$$\phi_T \approx 2\pi(1 + \delta_3), \quad (5.61)$$

donde el término extra es la precesión. Entonces

$$\begin{aligned} \Delta_\phi &= 2\pi\delta_3, \\ &= 2\pi \left[\frac{3\mu^2}{h^2} + \frac{3\mu^4\alpha}{h^8} \left(\frac{2}{3} + \frac{e^2}{2} \right) + \frac{3\mu^6\alpha'}{h^{10}} \left(1 + \frac{5e^2}{2} + \frac{5e^4}{8} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.62)$$

y en términos de los parámetros astronómicos involucrados en la ecuación (5.41), la expresión toma la forma

$$\Delta_\phi = 2\pi \left[\frac{3GM}{4a(1-e^2)c^2} + \frac{15R_G^4}{16a^4(1-e^2)^4} \left(\frac{2}{3} + \frac{e^2}{2} \right) + \frac{21GMR_G^4}{64a^5(1-e^2)^5c^2} \left(1 + \frac{5e^2}{2} + \frac{5e^4}{8} \right) \right]. \quad (5.63)$$

Finalmente, para acotar con la precesión de la órbita de Mercurio, se introducen los datos (5.30) en la expresión anterior. Luego, se utiliza la cota (5.31) para las contribuciones extras a la precesión de Mercurio y se obtiene la desigualdad

$$|\Delta_\phi| = |3.99 \times 10^{-8} + 6.81 \times 10^{-44} R_G^4 + 1.02 \times 10^{-51} R_G^4| \leq 2\pi \times 10^{-12}. \quad (5.64)$$

De lo anterior, y considerando únicamente las contribuciones del modelo de Ungravity, la cota para el parámetro de longitud R_G es

$$|R_G| \leq 6.19 \times 10^7 \text{ m}. \quad (5.65)$$

5.2.4. Caso $d_u = 4$

Para este último caso, la ecuación diferencial para u_1 (5.29) es

$$u_1'' + u_1 = \frac{c^2\mu}{h^2} (1 + e \cos \phi)^2 + \frac{c^2\mu^5}{3h^{12}} \alpha (1 + e \cos \phi)^6 + \frac{c^2\mu^7}{3h^{14}} \alpha' (1 + e \cos \phi)^8, \quad (5.66)$$

y las contribuciones de orden lineal en ϕ

$$u_1 = \left[\frac{c^2\mu}{h^2} + \frac{c^2\mu^5}{3h^{12}} \alpha \left(3 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 \right) + \frac{c^2\mu^7}{3h^{14}} \alpha' \left(4 + 21e^2 + \frac{35}{2}e^4 + \frac{35}{16}e^6 \right) \right] e\phi \sin \phi. \quad (5.67)$$

Entonces, de la solución propuesta y la solución a la ecuación u_0 , la ecuación de movimiento es

$$u = \frac{\mu}{h^2}(1 + e \cos \phi) + \varepsilon \left[\frac{c^2 \mu}{h^2} + \frac{c^2 \mu^5}{3h^{12}} \alpha \left(3 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 \right) + \frac{c^2 \mu^7}{3h^{14}} \alpha' \left(4 + 21e^2 + \frac{35}{2}e^4 + \frac{35}{16}e^6 \right) \right] e \phi \sin \phi. \quad (5.68)$$

Luego, se define

$$\delta_4 \equiv \varepsilon \left[\frac{c^2 \mu}{h^2} + \frac{c^2 \mu^5}{3h^{12}} \alpha \left(3 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 \right) + \frac{c^2 \mu^7}{3h^{14}} \alpha' \left(4 + 21e^2 + \frac{35}{2}e^4 + \frac{35}{16}e^6 \right) \right], \quad (5.69)$$

que es un parámetro pequeño, por lo que la ecuación de movimiento puede reescribirse en la forma convencional

$$u = \frac{\mu}{h^2} \{1 + e \cos[\phi(1 - \delta_4)]\}. \quad (5.70)$$

De esta ecuación se identifica la precesión de las órbitas al igualar el argumento del coseno a un periodo completo, con lo que, al despejar el ángulo ϕ , se obtiene

$$\phi_T = \frac{2\pi}{1 - \delta_{R4}} \approx 2\pi(1 + \delta_{R4}), \quad (5.71)$$

siendo el segundo término la precesión. Ésta puede escribirse como

$$\Delta_\phi = 2\pi \left[\frac{3\mu^2}{h^2} + \frac{\mu^6}{h^{12}} \alpha \left(3 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 \right) + \frac{\mu^8}{h^{14}} \alpha' \left(4 + 21e^2 + \frac{35}{2}e^4 + \frac{35}{16}e^6 \right) \right]. \quad (5.72)$$

En los términos astronómicos que aparecen en la ecuación (5.41), la precesión es

$$\Delta_\phi = 2\pi \left[\frac{3GM}{4a(1-e^2)c^2} + \frac{7R_G^6}{64a^6(1-e^2)^6} \left(3 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 \right) + \frac{9GMR_G^6}{256a^7(1-e^2)^7c^2} \left(4 + 21e^2 + \frac{35}{2}e^4 + \frac{35}{16}e^6 \right) \right], \quad (5.73)$$

y, de (5.30), la precesión de la órbita de Mercurio es

$$\Delta_\phi = 2\pi[1.99 \times 10^{-8} + (1.25 \times 10^{-65} + 1.58 \times 10^{-73})R_G^6]. \quad (5.74)$$

Al igual que en los casos anteriores, se descarta la contribución de orden 10^{-8} al ser el término proveniente de Relatividad General y se usa la cota (5.31) para delimitar el valor del parámetro R_G . Resulta la relación

$$|\Delta_\phi| = 2\pi|1.25 \times 10^{-65}R_G^6| \leq 2\pi \times 10^{-12}, \quad (5.75)$$

con lo que se obtiene

$$|R_G| \leq 6.56 \times 10^8 \text{m}. \quad (5.76)$$

5.2.5. Sumario

Las cotas calculadas en secciones anteriores para la precesión del perihelio de Mercurio se resumen a continuación ¹

d_u	$R_G \leq$
$\frac{3}{2}$	0.11 m
2	6.40×10^4 m
3	6.19×10^7 m
4	6.56×10^8 m

La energía característica Λ_u en función de la masa característica M_u , mediante la relación (4.81), se muestra a continuación en escala logarítmica

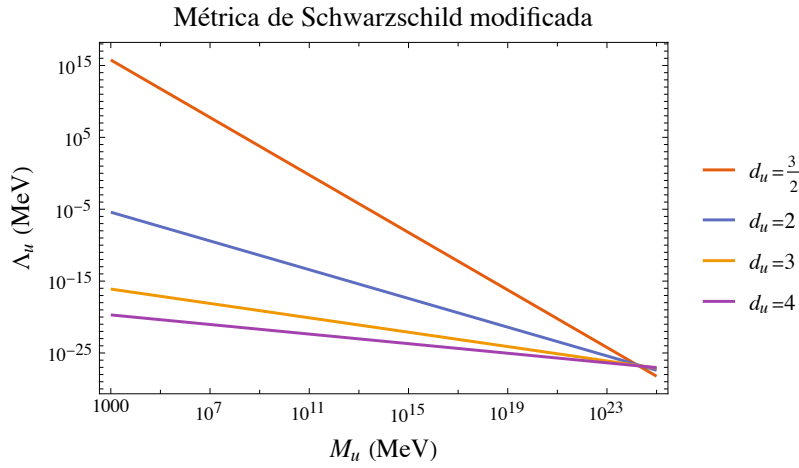


FIGURA 5.1: Espacio de parámetros con cotas para la precesión del perihelio de Mercurio, a partir de una métrica de Schwarzschild modificada.

5.3. Deflexión de la luz a partir de métrica modificada

El análisis de este problema se realiza a partir de la métrica modificada

$$\begin{cases} g_{rr}^{-1} = -g_{00} = 1 - \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r} \right)^{2d_u-2} \right], \\ g_{\theta\theta} = r^2, \\ g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta. \end{cases} \quad (5.77)$$

En este caso se considera, al igual que en la sección de órbitas planetarias, un campo gravitacional generado por un cuerpo con distribución de masa esférica, con la diferencia de que ahora se busca describir el movimiento de una partícula sin masa, es

¹Notar que son las mismas cotas obtenidas para el potencial Newtoniano modificado, salvo un factor de 2.

decir, que se mueve sobre una geodésica nula,

$$\begin{aligned} 2K &= 0, \\ &= \left(1 - \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_u-2}\right]\right) \dot{t}^2 \\ &\quad - \left(1 - \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_u-2}\right]\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2. \end{aligned} \quad (5.78)$$

La ecuación está escrita en unidades de $c = 1$ por simplicidad en la notación.

Ahora, utilizando las ecuaciones tipo Euler-Lagrange, siguen siendo válidas las ecuaciones de movimiento y cantidades conservadas obtenidas en la sección anterior, entre las que destaca la definición del momento angular por unidad de masa

$$h = r^2 \dot{\phi}, \quad (5.79)$$

después de fijar el sistema al plano $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ello permite reescribir la ecuación de la geodésica como

$$\begin{aligned} 2K &= a^2 \left(1 - \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_u-2}\right]\right)^{-1} - \left(1 - \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_u-2}\right]\right)^{-1} \dot{r}^2 \\ &\quad - r^2 \dot{\phi}^2 = 0, \end{aligned} \quad (5.80)$$

donde a es una constante, definida por una de las ecuaciones de conservación.

De la misma forma, se realiza el cambio de variable $u \equiv \frac{1}{r}$ y, utilizando la ecuación para el momento angular (5.79), las derivadas de las coordenadas r y ϕ se escriben como

$$\dot{r} = -h \frac{du}{d\phi} \quad \text{y} \quad \dot{\phi} = hu^2. \quad (5.81)$$

Entonces, la ecuación de la geodésica en términos de h y u ,

$$\begin{aligned} &a^2 \left(1 - GMu \left[1 + (uR_G)^{2d_u-2}\right]\right)^{-1} - \left(1 - GMu \left[1 + (uR_G)^{2d_u-2}\right]\right)^{-1} h^2 \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 \\ &\quad - h^2 u^2 = 0, \end{aligned} \quad (5.82)$$

puede reescribirse como

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{a^2}{h^2} - \left(1 - GMu \left[1 + (uR_G)^{2d_u-2}\right]\right) u^2, \quad (5.83)$$

entonces

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{a^2}{h^2} + GMu^3 + GM(R_G)^{2d_u-2} u^{2d_u+1}. \quad (5.84)$$

Finalmente, para obtener la ecuación diferencial, se toma la derivada con respecto de ϕ y se escribe de vuelta en unidades de $c \neq 1$. El resultado es

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{3}{2} \frac{GMu^2}{c^2} + (d_u + 1/2) \frac{GM}{c^2} R_G^{2d_u-2} u^{2d_u}. \quad (5.85)$$

Para resolverla, primero se considera el límite de Relatividad Especial, en que $M = 0$, la ecuación anterior es

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 0, \quad (5.86)$$

la cual tiene como solución la recta

$$u = \frac{1}{D} \sin(\phi - \phi_0), \quad (5.87)$$

donde D es la distancia de mayor acercamiento al origen y que satisface la condición $\phi_0 < \phi < \phi_0 + \pi$.

Luego, para los casos en que $M \neq 0$, se propone la solución de la forma

$$u = u_0 + mu_1, \quad (5.88)$$

considerando el parámetro pequeño $mu = \frac{GM}{c^2 r}$. Sustituyendo en la ecuación diferencial (5.85), se tiene

$$u_0'' + mu_1'' + u_0 + mu_1 = \frac{3}{2} mu_0^2 + (d_u + 1/2) m R_G^{2d_u-2} u_0^{2d_u}, \quad (5.89)$$

a primer orden en en parámetro de expansión y donde u'' denota la segunda derivada con respecto de ϕ .

Tomando los términos de orden m^0 de ambos lados de la igualdad, implica que la ecuación a orden cero es el caso de espacio plano (5.86), por lo tanto la solución es la recta (5.87).

Luego, a primer orden en m , la ecuación diferencial es

$$u_1'' + u_1 = \frac{3}{2} u_0^2 + (d_u + 1/2) R_G^{2d_u-2} u_0^{2d_u}, \quad (5.90)$$

y al introducir la solución u_0

$$u_1'' + u_1 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{D} \sin \phi \right)^2 + (d_u + 1/2) R_G^{2d_u-2} \left(\frac{1}{D} \sin \phi \right)^{2d_u}, \quad (5.91)$$

fijando $\phi_0 = 0$.

A continuación, se resuelve la ecuación diferencial (5.85) para los casos $d_u = \frac{3}{2}, 2, 3$ y 4 . Para ello, se obtiene la solución de la ecuación anterior mediante el software *Mathematica* y, considerando todos los términos de la solución, se construye la ecuación de movimiento usando la propuesta (5.88) y la solución a orden cero (5.87). Después, considerando el caso de la siguiente figura

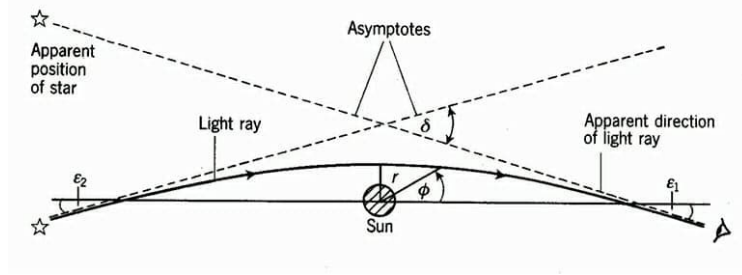


FIGURA 5.2: Trayectoria de los rayos de luz real y aparente, en presencia de una distribución de masa esférica.

se toma el límite de distancias grandes entre la distribución de masa y la fuente de luz y se toman los ángulos pequeños ε_1 y ε_2 , que forman las asíntotas de los rayos de luz con el plano $\phi = 0$.

También del caso ilustrado en la figura, se toma la relación geométrica

$$\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad (5.92)$$

que indica el ángulo de deflexión.

5.3.1. Caso $d_u = \frac{3}{2}$

En este caso la ecuación diferencial (5.91) es

$$u_1'' + u_1 = \frac{3 \sin^2 \phi}{2 D^2} + \frac{2 R_G}{D^3} \sin^3 \phi. \quad (5.93)$$

Se tiene que la solución es

$$\begin{aligned} u_1 = & A \cos \phi + B \sin \phi - \frac{3 R_G}{4 D^3} \phi \cos \phi + \frac{9 \cos^2 \phi}{8 D^2} - \frac{1 \cos \phi \cos(3\phi)}{8 D^2} + \frac{\sin^4 \phi}{2 D^2} \\ & + \frac{R_G}{2 D^3} \sin^5 \phi + \frac{R_G}{2 D^3} \cos \phi \sin(2\phi) - \frac{R_G}{16 D^3} \cos \phi \sin(4\phi), \end{aligned} \quad (5.94)$$

donde los primeros dos términos de la ecuación pueden reescribirse como

$$C \cos(\phi + \delta) = A \cos \phi + B \sin \phi, \quad (5.95)$$

donde δ es una fase que puede fijarse a cero. Entonces, con la solución a orden cero (5.87), la ecuación de movimiento (5.88) es

$$\begin{aligned} u = & \frac{\sin \phi}{D} + \frac{m}{D^2} \left[C \cos \phi - \frac{3 R_G}{4 D} \phi \cos \phi + \frac{9 \cos^2 \phi}{8 D^2} - \frac{1 \cos \phi \cos(3\phi)}{8 D^2} + \frac{\sin^4 \phi}{2 D^2} + \right. \\ & \left. \frac{R_G}{2 D^3} \sin^5 \phi + \frac{R_G}{2 D^3} \cos \phi \sin(2\phi) - \frac{R_G}{16 D^3} \cos \phi \sin(4\phi) \right]. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Ahora, como se observa en la figura 5.2, para estrellas alejadas de la distribución de masa que genera el campo gravitacional, vale tomar el límite $r \rightarrow \infty$, es decir $u \rightarrow 0$. Escribiendo la ecuación anterior en este límite y sustituyendo el ángulo ϕ

por el ángulo ε_1 , que cumple $|\varepsilon_1| \ll 1$, la ecuación de movimiento toma la forma

$$0 = -\frac{\varepsilon_1}{D} + \frac{m}{D^2} \left[C - \frac{3}{4} \frac{R_G}{D} (-\varepsilon_1) + \frac{9}{8} - \frac{1}{8} \cos(3\varepsilon_1) + \frac{\varepsilon_1^4}{2} - \frac{R_G}{2D} \varepsilon_1^5 + \frac{R_G}{2D} \sin(-2\varepsilon_1) - \frac{R_G}{16D} \sin(-4\varepsilon_1) \right], \quad (5.97)$$

aproximando las funciones $\cos \phi \approx 1$ y $\sin \phi \approx \phi$ a primer orden.

De la misma forma, al aproximar a primer orden para los argumentos con múltiplos de ε_1 , la ecuación cumple

$$-\frac{\varepsilon_1}{D} + \frac{m}{D^2} \left[C + 1 + \left(\frac{3}{4} \frac{R_G}{D} - \frac{R_G}{D} + \frac{1}{4} \frac{R_G}{D} \right) \varepsilon_1 \right] = 0. \quad (5.98)$$

Como puede notarse inmediatamente, la contribución de R_G se anula, entonces

$$-\frac{\varepsilon_1}{D} + \frac{m(C+1)}{D^2} = 0, \quad (5.99)$$

por lo tanto, la relación para el ángulo ε_1 es

$$\varepsilon_1 = \frac{m(C+1)}{D}. \quad (5.100)$$

Ahora, se realiza este mismo procedimiento para encontrar la relación para el ángulo ε_2 que se aprecia en la figura 5.2, sustituyendo $\phi = \pi + \varepsilon_2$, donde $|\varepsilon_2| \ll 1$. Luego de sustituir y aproximar las funciones seno y coseno a primer orden, se toma el límite de distancias grandes respecto al origen. Entonces, la ecuación de movimiento se escribe como

$$0 = \frac{1}{D} \sin(\pi + \varepsilon_2) + \frac{m}{D^2} \left[C \cos(\pi + \varepsilon_2) - \frac{3}{4} \frac{R_G}{D} (\pi + \varepsilon_2) \cos(\pi + \varepsilon_2) + \frac{9}{8} \cos^2(\pi + \varepsilon_2) - \frac{1}{8} \cos(\pi + \varepsilon_2) \cos[3(\pi + \varepsilon_2)] + \frac{\sin^4(\pi + \varepsilon_2)}{2} + \frac{R_G}{2D} \sin^5(\pi + \varepsilon_2) + \frac{R_G}{2D} \cos(\pi + \varepsilon_2) \sin[2(\pi + \varepsilon_2)] - \frac{R_G}{16D} \cos(\pi + \varepsilon_2) \sin[4(\pi + \varepsilon_2)] \right]. \quad (5.101)$$

Las funciones seno y coseno con suma de ángulos se aproximan como

$$\begin{aligned} \cos(\pi + \varepsilon_2) &\approx -1, & \sin(\pi + \varepsilon_2) &\approx -\varepsilon_2, \\ \cos(3\pi + 3\varepsilon_2) &= \cos 3\varepsilon_2 \approx 1 & \text{y} & \sin(2\pi + 2\varepsilon_2) = \sin 2\varepsilon_2 \approx 2\varepsilon_2, \end{aligned} \quad (5.102)$$

de donde resulta la ecuación

$$0 = -\frac{\varepsilon_2}{D} + \frac{m}{D^2} \left[-C + \frac{3}{4} \frac{R_G}{D} (\pi + \varepsilon_2) + \frac{9}{8} + \frac{1}{8} (1 - 4\varepsilon_2^2) + \frac{\varepsilon_2^4}{2} - \frac{R_G}{2D} \varepsilon_2^5 - \frac{R_G}{2D} (2\varepsilon_2) + \frac{R_G}{16D} (4\varepsilon_2 - 8\varepsilon_2^3) \right]. \quad (5.103)$$

Después, despreciando los términos de orden ε_2^2 o mayor, se tiene

$$-\frac{\varepsilon_2}{D} + \frac{m}{D^2} \left[-C + \frac{3}{4} \frac{R_G}{D} \pi + \frac{10}{8} + \left(\frac{3}{4} R_G - \frac{R_G}{D} + \frac{1}{4} \frac{R_G}{D} \right) \varepsilon_2 \right] = 0, \quad (5.104)$$

donde la suma entre paréntesis se anula. Al despejar ε_2 , se tiene la relación

$$\varepsilon_2 = \frac{m}{D} \left(-C + \frac{10}{8} + \frac{3\pi R_G}{4 D} \right). \quad (5.105)$$

Finalmente, de la relación geométrica de la figura, $\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, junto con la ecuación anterior y la ecuación (5.100), el ángulo entre la asíntota de la trayectoria real y la observada es

$$\delta = \frac{m}{D} \left(\frac{18}{8} + \frac{3\pi R_G}{4 D} \right) = \frac{3}{4} \frac{m}{D} \left(3 + \pi \frac{R_G}{D} \right), \quad (5.106)$$

por lo tanto, el ángulo deflectado, en unidades no relativistas, es

$$\delta = \frac{3}{4} \frac{GM}{c^2 D} \left(3 + \pi \frac{R_G}{D} \right). \quad (5.107)$$

Este resultado, al compararse con el obtenido con la métrica de Schwarzschild sin modificar, tiene la contribución extra del parámetro de longitud R_G , pesada por la inversa del mayor acercamiento entre el rayo de luz y el origen.

5.3.2. Caso $d_u = 2$

En este caso la ecuación diferencial (5.91) es

$$u_1'' + u_1 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{D} \sin \phi \right)^2 + \frac{5}{2} R_G^2 \left(\frac{1}{D} \sin \phi \right)^4, \quad (5.108)$$

y, la solución junto con la ecuación para u_0 , da como resultado la ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} u = \frac{\sin \phi}{D} + m \left[C \cos \phi + \left(\frac{9}{8D^2} + \frac{25}{16} \frac{R_G^2}{D^4} \right) \cos^2 \phi \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{8D^2} + \frac{25}{96} \frac{R_G^2}{D^4} \right) \cos \phi \cos 3\phi + \frac{1}{32} \frac{R_G^2}{D^4} \cos \phi \cos 5\phi \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{D^2} + \frac{5}{12} \frac{R_G^2}{D^4} \right) \sin^4 \phi - \frac{5}{96} \frac{R_G^2}{D^4} \sin \phi \sin 3\phi + \frac{1}{32} \frac{R_G^2}{D^4} \sin \phi \sin 5\phi \right]. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Análogo al caso anterior, en el límite $r \rightarrow \infty$ y con el ángulo $\phi = \varepsilon_1$

$$0 = \frac{-\varepsilon_1}{D} + \frac{m}{D^2} \left[C + \frac{9}{8} - \frac{1}{8} + \left(\frac{25}{16D^2} - \frac{25}{96D^2} + \frac{1}{32D^2} \right) R_G^2 \right], \quad (5.110)$$

aproximando a primer orden en ε_1 . Entonces

$$\frac{-\varepsilon_1}{D} + \frac{m}{D^2} \left[c + 1 + \frac{4}{3D^2} R_G^2 \right] = 0, \quad (5.111)$$

por lo tanto

$$\varepsilon_1 = \frac{m}{D} \left[C + 1 + \frac{4}{3D^2} R_G^2 \right]. \quad (5.112)$$

Luego, para el ángulo de la asíntota real, se toma el argumento $\phi = \pi + \varepsilon_2$. La ecuación de movimiento toma la forma

$$0 = -\frac{\varepsilon_2}{D} + \frac{m}{D^2} \left[-C + \frac{9}{8} + \frac{25}{16} \frac{R_G^2}{D^2} + \left(\frac{1}{8} + \frac{25}{96} \frac{R_G^2}{D^2} \right) (1 - 4\varepsilon_2^2) \right. \\ \left. - \frac{1}{32} \frac{R_G^2}{D^2} \cos(5\pi + 5\varepsilon_2) + \frac{5}{96} \frac{R_G^2}{D^2} \sin(3\pi + 3\varepsilon_2) \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{32} \frac{R_G^2}{D^4} \sin(5\pi + 5\varepsilon_2) \right]. \quad (5.113)$$

Se aproxima todo a primer orden en ε_2 , resultando

$$\varepsilon_2 = \frac{m}{D} \left[-C + \frac{10}{8} + \left(\frac{25}{16D^2} + \frac{25}{96D^2} + \frac{1}{32D^2} \right) R_G^2 \right], \quad (5.114)$$

entonces

$$\varepsilon_2 = \frac{m}{D} \left[-C + \frac{10}{8} + \frac{89}{48} \frac{R_G^2}{D^2} \right]. \quad (5.115)$$

Por último, la suma de ambos ángulos (5.92) da la deflexión en la trayectoria

$$\delta = \frac{m}{D} \left(\frac{18}{8} + \frac{51}{16} \frac{R_G^2}{D^2} \right), \quad (5.116)$$

y en unidades no relativistas

$$\delta = \frac{GM}{8c^2 D} \left(18 + \frac{51}{2} \frac{R_G^2}{D^2} \right). \quad (5.117)$$

5.3.3. Caso $d_u = 3$

La ec. diferencial (5.91)

$$u_1'' + u_1 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{D} \sin \phi \right)^2 + \frac{7}{2} R_G^4 \left(\frac{1}{D} \sin \phi \right)^6, \quad (5.118)$$

tiene como solución

$$u_1 = C \cos \phi + \frac{9}{8D^2} \cos^2 \phi + \frac{245}{128} \frac{R_G^4}{D^6} \cos^2 \phi - \left(\frac{1}{8D^2} + \frac{49}{128} \frac{R_G}{D^6} \right) \cos \phi \cos 3\phi \\ + \frac{49}{640} \frac{R_G^4}{D^6} \cos \phi \cos 5\phi - \frac{1}{128} \frac{R_G^4}{D^6} \cos \phi \cos 7\phi - \frac{7}{128} \frac{R_G^4}{D^6} \sin^2 \phi + \frac{1}{2D^2} \sin^4 \phi \\ + \frac{7}{16} \frac{R_G^4}{D^6} \sin^4 \phi - \frac{7}{128} \frac{R_G^4}{D^6} \sin \phi \sin 3\phi + \frac{7}{128} \sin \phi \sin 5\phi - \frac{1}{128} \frac{R_G^4}{D^6} \sin 7\phi \sin \phi. \quad (5.119)$$

Dicha solución, junto con la ecuación a orden cero (5.87), se introduce en la solución propuesta (5.88), para obtener la ecuación de movimiento (ver casos anteriores).

Luego, se considera la solución u para el ángulo de observación ε_1 que se muestra en la figura 5.2 y se toma el caso descrito en la imagen, en el límite de distancias

grandes donde $u \rightarrow 0$. Entonces, al igual que en los casos pasados, se aproximan las funciones seno y coseno a primer orden en ε_1 , lo que da como resultado la ecuación

$$0 = -\frac{\varepsilon_1}{D} + m \left[C + \frac{9}{8D^2} - \frac{1}{8D^2} + \frac{R_G^4}{D^6} \left(\frac{245}{128} - \frac{49}{128} + \frac{49}{640} - \frac{1}{128} \right) \right], \quad (5.120)$$

entonces

$$0 = -\frac{\varepsilon_1}{D} + m \left[C + \frac{1}{D^2} + \frac{8}{5} \frac{R_G^4}{D^6} \right], \quad (5.121)$$

por lo que el ángulo cumple la relación

$$\varepsilon_1 = \frac{m}{D} \left[C + 1 + \frac{8}{5} \frac{RG}{D^4} \right]. \quad (5.122)$$

por otro lado, se repite el procedimiento anterior para el ángulo $\phi = \pi + \varepsilon_2$, que describe la trayectoria real del rayo de luz. En el límite de largas distancias y a primer orden, la ecuación es

$$0 = -\frac{\varepsilon_2}{D} + \frac{m}{D^2} \left[-C + \frac{10}{8} + \frac{R_G^4}{D^4} \left(\frac{245}{128} + \frac{49}{128} + \frac{49}{640} - \frac{1}{128} \right) \right], \quad (5.123)$$

entonces

$$\varepsilon_2 = \frac{m}{D} \left(-C + \frac{10}{8} + \frac{757}{320} \frac{R_G^4}{D^4} \right). \quad (5.124)$$

Finalmente, el ángulo entre la trayectoria real y la aparente es

$$\delta = \frac{m}{D} \left(\frac{18}{8} + \frac{1269}{320} \frac{R_G^4}{D^4} \right), \quad (5.125)$$

por lo tanto

$$\delta = \frac{GM}{c^2 D} \left(\frac{18}{8} + \frac{1269}{320} \frac{R_G^4}{D^4} \right), \quad (5.126)$$

en unidades no relativistas.

5.3.4. Caso $d_u = 4$

En este caso la ecuación diferencial (5.91)

$$u_1'' + u_1 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{D} \sin \phi \right)^2 + \frac{9}{2} R_G^6 \left(\frac{1}{D} \sin \phi \right)^8, \quad (5.127)$$

y tiene como solución

$$\begin{aligned}
 u_1 = & C \cos \phi + \left(\frac{9}{8D^2} + \frac{567 R_G^6}{256 D^8} \right) \cos^2 \phi - \left(\frac{1}{8D^2} + \frac{63 R_G^6}{128 D^8} \right) \cos \phi \cos 3\phi \\
 & + \frac{81 R_G^6}{640 D^8} \cos \phi \cos 5\phi - \frac{81 R_G^6}{3584 D^8} \cos \phi \cos 7\phi + \frac{1 R_G^6}{512 D^8} \cos \phi \cos 9\phi \\
 & - \frac{27 R_G^6}{256 D^8} \sin^2 \phi + \left(\frac{1}{2D^2} + \frac{15 R_G^6}{32 D^8} \right) \sin^4 \phi - \frac{3 R_G^6}{64 D^8} \sin \phi \sin 3\phi \\
 & + \frac{9 R_G^6}{128 D^8} \sin \phi \sin 5\phi - \frac{9 R_G^6}{512 D^8} \sin \phi \sin 7\phi + \frac{1 R_G^6}{512 D^8} \sin \phi \sin 9\phi.
 \end{aligned} \tag{5.128}$$

Entonces, ecuación de movimiento puede obtenerse de (5.88), considerando la solución a orden cero (5.87). En la ecuación de movimiento obtenida, se sustituye el ángulo ϕ por el ángulo ε_1 que forma el observador respecto del plano en la figura 5.2 y se aproximan las funciones trigonométricas a primer orden. Entonces la ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned}
 u = & -\frac{\varepsilon_1}{D} + m \left[C + \left(\frac{9}{8D^2} + \frac{567 R_G^6}{256 D^8} \right) - \frac{1}{8D^2} - \frac{63 R_G^6}{128 D^8} + \frac{81 R_G^6}{640 D^8} \right. \\
 & \left. - \frac{81 R_G^6}{3584 D^8} + \frac{1 R_G^6}{512 D^8} \right]
 \end{aligned} \tag{5.129}$$

que se reescribe como

$$u = -\frac{\varepsilon_1}{D} + m \left[C + \frac{1}{D^2} + \left(\frac{567}{256} + \frac{63}{128} + \frac{81}{640} - \frac{81}{3584} + \frac{1}{512} \right) \frac{R_G^6}{D^8} \right]. \tag{5.130}$$

Luego, en el límite $u \rightarrow 0$

$$0 = \frac{-\varepsilon_1}{D} + \frac{m}{D^2} \left(C + 1 + \frac{64 R_G^6}{35 D^6} \right), \tag{5.131}$$

lo que proporciona una ecuación para ε_1 .

Se repite este procedimiento para encontrar el ángulo de la trayectoria real ε_2 . De acuerdo con el esquema mostrado, el ángulo es $\phi = \pi + \varepsilon_2$ y bajo las mismas consideraciones que en los casos anteriores, se obtiene la relación

$$\varepsilon_2 = \frac{m}{D} \left(-C + \frac{10}{8} + \frac{2867 R_G^6}{1120 D^6} \right). \tag{5.132}$$

Por último, usando la relación geométrica para el ángulo δ , se obtiene

$$\delta = \frac{m}{D} \left(\frac{18}{8} + \frac{983 R_G^6}{224 D^6} \right), \tag{5.133}$$

que en unidades no relativistas es

$$\delta = \frac{GM}{Dc^2} \left(\frac{18}{8} + \frac{983}{224} \frac{R_G^6}{D^6} \right). \quad (5.134)$$

5.3.5. Resultados

Para acotar el parámetro libre R_G , se utiliza la relación obtenida en Relatividad General (con la métrica de Schwarzschild no modificada)

$$\delta = \frac{4GM}{c^2 D} \quad (5.135)$$

y se calcula dicho valor de la deflexión tomando el caso de los rayos de luz que 'rozan' pasan muy cerca de la superficie del sol, utilizando los datos

$$GM = 1.327 \times 10^{20} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2} \quad \text{y} \quad D = 6.963 \times 10^8 \text{m}, \quad (5.136)$$

donde D es el radio del sol.

El ángulo de deflexión que resulta es

$$\delta_{RG} = 8.4814 \times 10^{-6} \text{rad} = 1.749''. \quad (5.137)$$

Por otro lado, el valor medido que se utiliza para comparar es el reportado por Dyson, Eddington y Davidson, que se incluye en d'Inverno, 1998,

$$\delta_{obs} = 1.98 \pm 0.12''. \quad (5.138)$$

Con lo anterior se obtiene la cota

$$|\delta_u| = |\delta_{obs} - \delta_{RG}| \leq 0.35'', \quad (5.139)$$

donde δ_u denota la contribución del modelo de Ungravity. Así, las cotas para cada valor de d_u , que corresponden a cada ángulo de deflexión, son las siguientes

d_u	Ángulo	Cota (m)
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4} \frac{GM}{c^2 D} \left(1 + \frac{\pi}{3} \frac{R_G}{D} \right)$	$ R_G \leq 2.37 \times 10^8$
2	$\frac{18}{8} \frac{GM}{c^2 D} \left(1 + \frac{34}{3} \frac{R_G^2}{D^2} \right)$	$ R_G \leq 1.23 \times 10^8$
3	$\frac{18}{8} \frac{GM}{c^2 D} \left(1 + \frac{141}{80} \frac{R_G^4}{D^4} \right)$	$ R_G \leq 4.67 \times 10^8$
4	$\frac{18}{8} \frac{GM}{c^2 D} \left(1 + \frac{983}{504} \frac{R_G^6}{D^6} \right)$	$ R_G \leq 5.24 \times 10^8$

Con los resultados anteriores, el espacio de parámetros para la energía en función de la masa característica de Unparticles, dado por la ecuación (4.81), se ve de la siguiente forma, considerando ambos ejes en escala logarítmica.

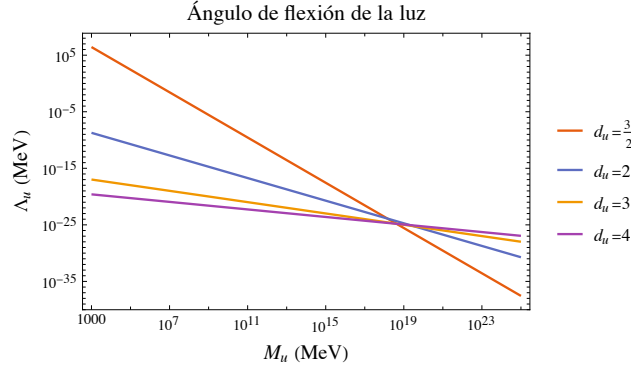


FIGURA 5.3: Espacio de parámetros con cotas para deflexión de luz, a partir en una métrica de Schwarzschild modificada, para estrellas que aparecen cercanas al sol, debido al campo gravitacional de éste.

5.4. Corrimiento al rojo gravitacional a partir de métrica modificada

En esta última sección, el efecto de la gravedad sobre la frecuencia de los fotones, descrito en la sección anterior, es utilizado para obtener cotas sobre el parámetro de longitud característica del modelo Ungravity, R_G . Tomando el elemento 00 de la métrica modificada (5.77)

$$g_{00} = -1 + \frac{GM}{c^2 r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r} \right)^{2d_u-2} \right], \quad (5.140)$$

e identificándolo con la aproximación en el límite de campo débil $g_{00} \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2}$, se tiene

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} = -1 + \frac{GM}{c^2 r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r} \right)^{2d_u-2} \right], \quad (5.141)$$

lo que permite escribir el potencial clásico como

$$\phi = -c^2 + \frac{GM}{2r} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r} \right)^{2d_u-2} \right]. \quad (5.142)$$

Entonces, el corrimiento de la frecuencia obtenido anteriormente (3.68), junto con el potencial ϕ , toma la forma

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{2c^2} \left\{ \frac{1}{r_1} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r_1} \right)^{2d_u-2} \right] - \frac{1}{r_2} \left[1 + \left(\frac{R_G}{r_2} \right)^{2d_u-2} \right] \right\}, \quad (5.143)$$

por lo tanto

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{2c^2} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{R_G^{2d_u-2}}{r_1^{2d_u-1}} - \frac{1}{r_2} - \frac{R_G^{2d_u-2}}{r_2^{2d_u-1}} \right], \quad (5.144)$$

es el corrimiento provocado por una fuente esféricamente simétrica con corrección de Ungravity.

Ahora, se calculan las cotas para el parámetro R_G . Primero, se obtiene la contribución

extra $\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_u$ proveniente de la modificación en la métrica y, luego, se compara con la diferencia entre el corrimiento predicho por la teoría (3.71) y el observado en el experimento (3.72). Así, las nuevas contribuciones deben cumplir la relación

$$\left|\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_u\right| \leq \left|\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{obs} - \left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{RG}\right| \leq 6 \times 10^{-3}, \quad (5.145)$$

lo que restringe el valor del parámetro de interés. Mediante este procedimiento, se estiman los valores máximos de R_G para los casos $d_u = \frac{3}{2}, 2, 3$ y 4.

- Caso $d_u = \frac{3}{2}$:

La ecuación para el corrimiento de la frecuencia (5.144) es

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{2c^2} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{RG}{r_1^2} - \frac{1}{r_2} - \frac{R_G}{r_2^2} \right]. \quad (5.146)$$

Entonces, introduciendo los datos experimentales (3.70), resultan los siguientes valores

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 2.21 \times 10^{-3} \text{m} \left(-1.11 \times 10^{-12} \text{m}^{-1} - 3.49 \times 10^{-19} R_G \text{m}^{-2} \right). \quad (5.147)$$

Nótese que el primer término es del orden de la contribución usual obtenida de Relatividad General, como se indica en (3.71), por lo cual, únicamente el segundo término es considerado como la contribución extra, asociada a las modificaciones en la métrica. La contribución

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_u = 2.21 \times 10^{-3} \text{m}^{-1} \left(-3.49 \times 10^{-19} R_G \text{m}^{-2} \right), \quad (5.148)$$

se introduce en la ecuación (5.145), lo que resulta en el valor máximo para R_G

$$|R_G| \leq 7.75 \times 10^{18} \text{m}. \quad (5.149)$$

- Caso $d_u = 2$:

Para este caso, la ec. (5.144) toma la forma

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{2c^2} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + R_G^2 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \right], \quad (5.150)$$

y al introducir los valores (3.70)

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 2.21 \times 10^{-3} \text{m} \left(-1.11 \times 10^{-12} \text{m}^{-1} - 8.21 \times 10^{-26} R_G^2 \text{m}^{-3} \right). \quad (5.151)$$

Análogo al caso anterior, se considera únicamente el segundo término como contribución extra, lo que resulta, utilizando (5.145), en la cota

$$|R_G| \leq 5.74 \times 10^{12} \text{m}. \quad (5.152)$$

■ Caso $d_u = 3$:

La ecuación (5.144) en este caso es

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{2c^2} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + R_G^4 \left(\frac{1}{r_1^5} - \frac{1}{r_2^5} \right) \right], \quad (5.153)$$

y con los valores indicados en (3.70)

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 2.21 \times 10^{-3} \text{m} \left(-1.11 \times 10^{-12} \text{m}^{-1} - 3.37 \times 10^{-39} R_G^4 \text{m}^{-5} \right). \quad (5.154)$$

Con las mismas consideraciones que en los casos anteriores, se obtiene el siguiente valor para el parámetro de longitud R_G

$$|R_G| \leq 5.32 \times 10^9 \text{m}. \quad (5.155)$$

■ Caso $d_u = 4$:

Por último, para $d_u = 4$, la ecuación para el corrimiento de la frecuencia es

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{2c^2} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + R_G^6 \left(\frac{1}{r_1^7} - \frac{1}{r_2^7} \right) \right], \quad (5.156)$$

y con los valores (3.70) del experimento considerado

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 2.21 \times 10^{-3} \text{m} (-1.11 \times 10^{-12} \text{m}^{-1} - 1.16 \times 10^{-52} R_G^6 \text{m}^{-7}). \quad (5.157)$$

Para acotar el parámetro libre del modelo en cuestión, se toma el segundo término de la ecuación anterior como la contribución más relevante y, usando la cota (5.145), el valor de R_G debe cumplir

$$|R_G| \leq 5.34 \times 10^8 \text{m}. \quad (5.158)$$

Con los resultados obtenidos anteriormente, se grafica el espacio de parámetros para la energía característica de Unparticles Λ_u , en términos de la masa característica del modelo M_u , usando la ecuación (4.81). Con los valores

d_u	$ R_G \leq$
$\frac{3}{2}$	$7.75 \times 10^{18} \text{m}$
2	$5.74 \times 10^{12} \text{m}$
3	$5.32 \times 10^9 \text{m}$
4	$5.34 \times 10^8 \text{m}$

el espacio de parámetros, en escala logarítmica, se representa como

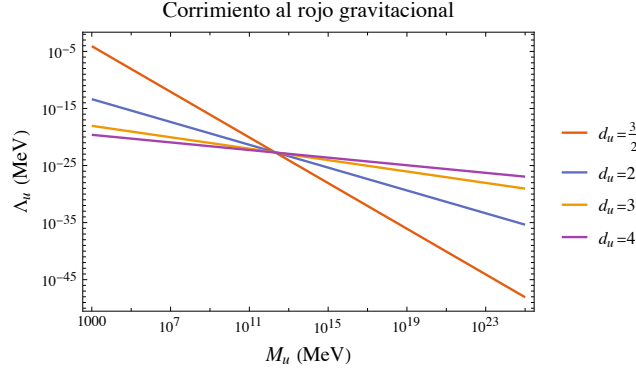


FIGURA 5.4: Espacio de parámetros con cotas dadas por el experimento Pound-Rebka a la ecuación modificada de corrimiento al rojo gravitacional, obtenida a partir de una métrica de Schwarzschild modificada.

5.5. Comparaciones

Como parte final de este trabajo, se realizan comparaciones entre los espacios de parámetros generados a partir de las distintas ecuaciones modificadas, aplicadas a las pruebas clásicas de la Relatividad General. En la comparación también se incluyen dos casos tomados de la literatura. Todas las gráficas tienen ambos ejes en escala logarítmica.

Primero se consideran los espacios de parámetros que resultan del potencial modificado, luego los tres casos para el fenómeno de precesión en la órbita de Mercurio, después los tres casos para el corrimiento al rojo gravitacional y finalmente todos los casos, incluyendo el de la constante cosmológica y el de la ley de inverso cuadrado.

Los primeros casos a considerar son el espacio de parámetros presentado en Goldberg y Nath, 2008, obtenido al calcular las contribuciones de Ungravity en desviaciones de la ley de inverso cuadrado, mostrados en la gráfica como líneas punteadas, y los resultados del capítulo 4, mostrados en la gráfica como líneas sólidas, obtenidos de calcular la precesión al perihelio de Mercurio. Ambos casos a partir del potencial (4.6).

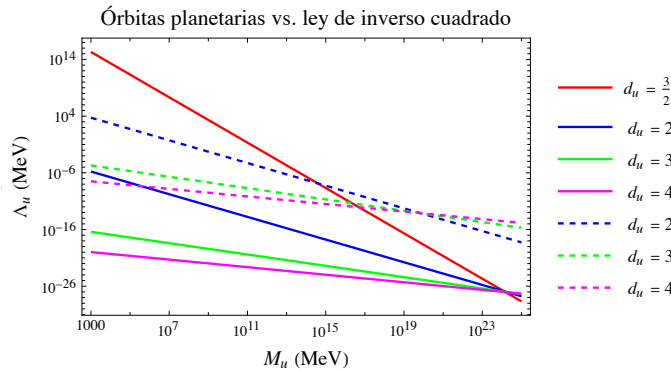


FIGURA 5.5: Comparación entre los espacios de parámetros obtenidos con las cotas para la precesión del perihelio de Mercurio y para la desviación a la ley de inverso cuadrado, a partir de un potencial Newtoniano modificado.

Siendo las líneas punteadas los resultados de la desviación de la ley de inverso cuadrado, puede notarse que la única contribución nueva en la región válida (por encima de las demás rectas) es la recta para el caso $d_u = \frac{3}{2}$ de la precesión a partir del potencial modificado (cabe mencionar que este valor para d_u no es considerado en la referencia en cuestión). Esta línea representa la mejor cota el espacio de parámetros hasta su intersección con la línea punteada azul, que representa la cota obtenida para la ley de inverso cuadrado modificada, para el caso $d_u = 2$. La intersección se da aproximadamente en una masa del orden $\sim 10^{15} \text{ GeV}$.

Al visualizar por separado las líneas para $d_u = 2, d_u = 3$ y $d_u = 4$, para ambos experimentos, se observa que las líneas que acotan la región válida para la energía característica son paralelas y que las cotas que resultan de estudiar la precesión de las órbitas planetarias aparecen por debajo de las punteadas, es decir, en la zona descartada por el experimento de la ley de inverso cuadrado con modificaciones.

Ahora, se comparan los espacios de parámetros resultado de resolver el problema de órbitas planetarias, a partir del potencial (4.6), la fuerza (4.83) y la métrica modificada (5.77). En cada una de las gráficas se muestran los tres casos mencionados para un solo valor de d_u .

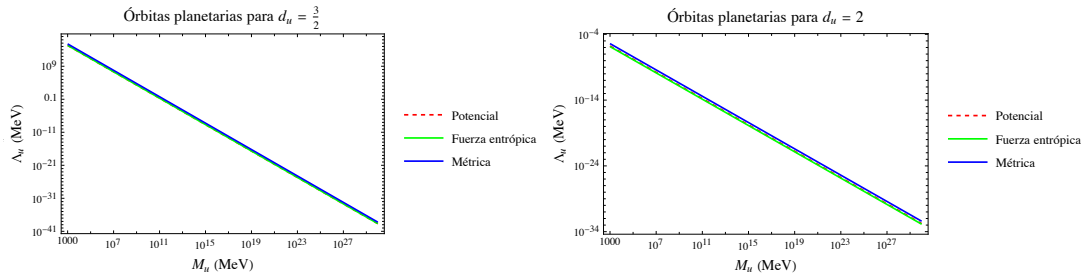


FIGURA 5.6: Comparación entre los espacios de parámetros para cotas obtenidas de la precesión de la órbita de Mercurio, a partir de un potencial Newtoniano modificado, una fuerza Newtoniana entrópica modificada y una métrica de Schwarzschild modificada. Se muestran $d_u = \frac{3}{2}$ y $d_u = 2$

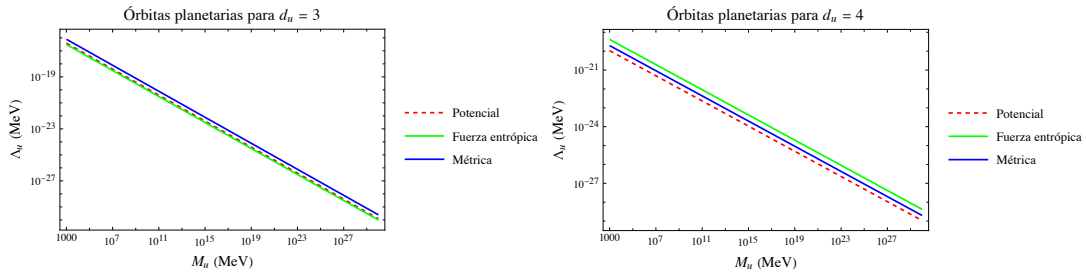


FIGURA 5.7: Comparación entre los espacios de parámetros para cotas obtenidas de la precesión de la órbita de Mercurio, a partir de un potencial Newtoniano modificado, una fuerza Newtoniana entrópica modificada y una métrica de Schwarzschild modificada. Se muestran $d_u = 3$ y $d_u = 4$

En las gráficas anteriores puede verse que el espacio de parámetros queda acotado prácticamente de la misma forma utilizando las tres ecuaciones modificadas. En

particular, el modelo de órbitas planetarias usando el potencial modificado de Goldberg, en el caso $d_u = \frac{3}{2}$, resulta en el mismo valor numérico que la cota obtenida mediante la fuerza modificada, para el mismo valor de d_u (ver tablas de la secciones 4 y 2). En este caso la línea de las órbitas a partir de una métrica modificada queda por encima de ambas.

Para el caso de $d_u = 2$ la línea que acota el espacio de parámetros obtenida de la fuerza modificada queda por encima de las otras dos, las cuales están prácticamente una sobre la otra. Para los casos $d_u = 3$ y $d_u = 4$ las rectas tienen una separación mayor entre ellas. Para $d_u = 3$ la cota obtenida para la precesión de Mercurio es la que mejor acota el espacio de parámetros y para $d_u = 4$ la mejor cota proviene de la fuerza modificada.

Por otro lado, se muestran las comparaciones para el espacio de parámetros obtenido al estudiar el fenómeno de corrimiento al rojo gravitacional, utilizando las aproximaciones clásicas para el potencial y la fuerza fuerza modificados, así como la métrica de Schwarzschild modificada.

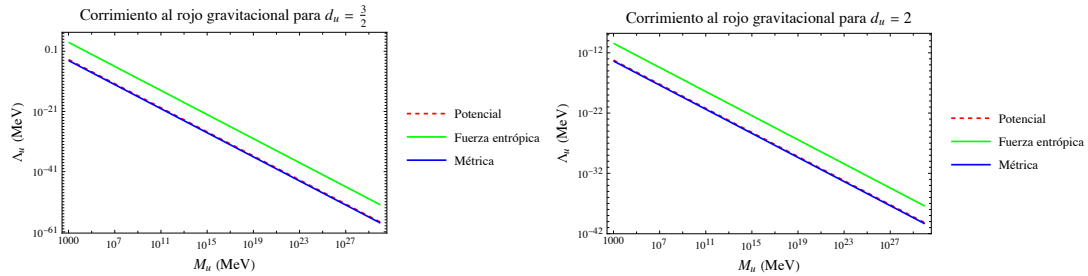


FIGURA 5.8: Comparación entre las cotas obtenidas para el corrimiento al rojo gravitacional, a partir de distintas ecuaciones con correcciones de Ungravity. Se muestran los casos $d_u = \frac{3}{2}$ y $d_u = 2$

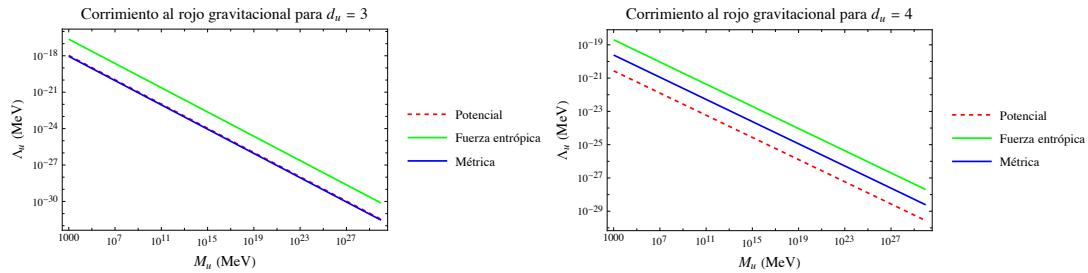


FIGURA 5.9: Comparación entre las cotas obtenidas para el corrimiento al rojo gravitacional, a partir de distintas ecuaciones con correcciones de Ungravity. Se muestran los casos $d_u = 3$ y $d_u = 4$

Como puede observarse, las cotas obtenidas a partir de la métrica modificada y a partir de la fuerza modificada son iguales en cada caso y quedan por encima de la cota obtenida mediante el potencial modificado.

Por último, se realizó la comparación de todos los fenómenos considerados en este trabajo. Se incluyen los casos tomados de la literatura, para desviaciones a la ley de inverso cuadrado a partir de un potencial modificado y para la constante cosmológica efectiva; además se incluyen las cotas obtenidas para pruebas clásicas de la Relatividad General, para cada valor de d_u en las siguientes gráficas, se tomó

la mejor cota para las órbitas planetarias y la mejor cota para el corrimiento al rojo gravitacional.

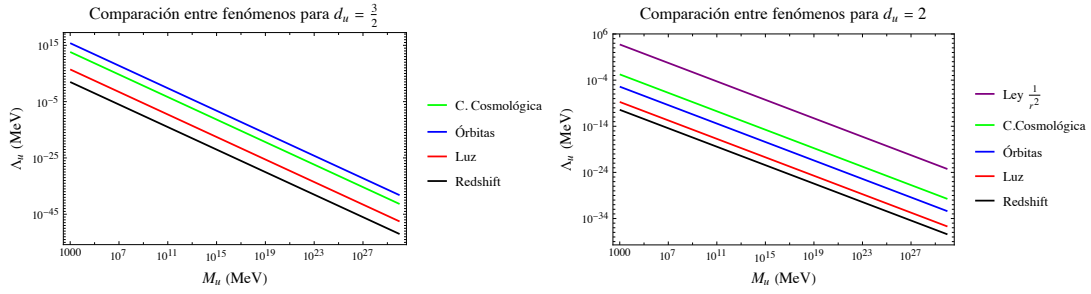


FIGURA 5.10: Comparación de espacios de parámetros con cotas de entre los cinco modelos para $d_u = \frac{3}{2}$ y $d_u = 2$.

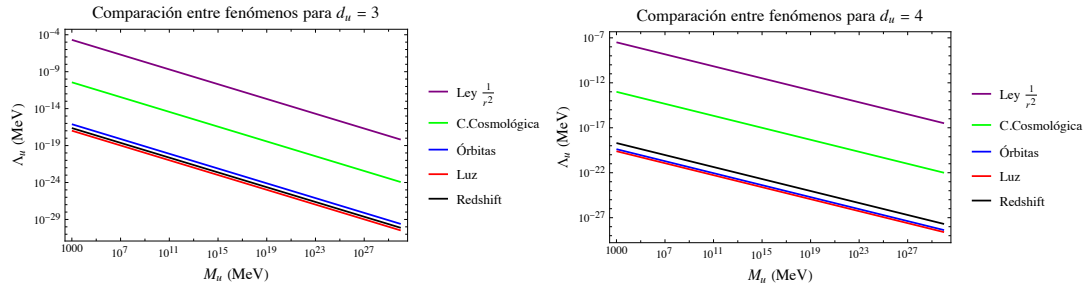


FIGURA 5.11: Comparación entre los cinco modelos para $d_u = 3$ y $d_u = 4$.

Como puede verse de las figuras anteriores, en los casos de $d_u = 2, 3$ y 4 la recta que acota mejor el espacio de parámetros es la obtenida con la desviación a la ley de inverso cuadrado usando un potencial modificado, seguida de ésta aparece la de la constante cosmológica efectiva y luego, en una región que se vuelve más pequeña al crecer el valor de d_u , todas las demás. Para el caso de $d_u = \frac{3}{2}$ la línea que acota mejor el espacio de parámetros es la de las órbitas planetarias a partir de una métrica modificada, seguida de las rectas obtenidas para órbitas planetarias a partir de aproximaciones clásicas (el potencial y la fuerza). Por debajo aparecen las rectas correspondientes a la constante cosmológica, la deflexión de la luz y el corrimiento al rojo gravitacional en ese orden. Cabe mencionar que para este valor de d_u no hay cota reportada para la desviación de la ley del inverso cuadrado en Goldberg y Nath, 2008. En general, puede notarse que conforme aumenta el valor del parámetro d_u las rectas que acotan el espacio de parámetros aparecen más dispersas.

Capítulo 6

Conclusiones

En general, el modelo Unparticles contribuye en las ecuaciones que describen la interacción gravitacional con un término que va como $\left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_u-2}$. Fijando el valor de d_u y considerando experimentos a distintas escalas, se obtienen cotas para el valor R_G . Así, al variar la masa, se obtienen cotas para la región permitida para la energía característica del modelo. Los experimentos considerados en este trabajo van desde la escala de un sistema en la superficie de la tierra (experimento Pound-Rebka), la escala de la tierra (eclipse solar), la escala del sistema solar (órbitas planetarias) y la escala cosmológica. Se observa que las cotas para los diferentes sistemas considerados son consistentes entre sí. Como puede observarse en la última comparación de la sección anterior, para $d_u = 2, 3$ y 4 , parece que la región permitida para la energía Λ_u se acota de mejor manera al considerar experimentos a escalas mayores.

Al estudiar un mismo fenómeno utilizando distintas ecuaciones, en este caso una aproximación clásica para la fuerza, otra para el potencial y una métrica modificada, se puede observar con qué precisión cada una de las ecuaciones describe a ese sistema en particular y hasta qué término las contribuciones son significativas, ejemplo de ello es que la fuerza modificada, en la que se considera hasta segundo orden, tiene los mismos resultados para la precesión de mercurio que la métrica modificada. Además, los resultados de este trabajo se puede reiterar que probar las ecuaciones modificadas en sistemas semi clásicos es una buena alternativa para descartar los modelos que proveen dichas modificaciones o proponer otros sistemas para probar su consistencia.

Por último, como proyección de este trabajo a futuro, se considera interesante la obtención de soluciones numéricas para un valor general de d_u , ello una vez que se ha comprobado que las cotas son consistentes entre sí y con lo encontrado en la literatura.

Bibliografía

- Abbott, B. P. y col. (2016). «GW150914: Implications for the Stochastic Gravitational-Wave Background from Binary Black Holes». En: *Phys. Rev. Lett.* 116 (13), pág. 131102. DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.131102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.131102). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.131102>.
- DeBenedictis, A. (2007). «Developments in Black Hole Research: Classical, Semi-classical, and Quantum». En: DOI: [10.48550/ARXIV.0711.2279](https://arxiv.org/abs/0711.2279). URL: <https://arxiv.org/abs/0711.2279>.
- Díaz-Barrón, Luis Rey y M. Sabido (2021). «On emergent gravity, ungravity and $\{upLambda\}$ ». En: *Physics Letters B* 818, pág. 136365. DOI: [10.1016/j.physletb.2021.136365](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2021.136365). URL: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2021.136365>.
- Díaz-Saldaña, I., J. López-Domínguez y M. Sabido (2020). «An Effective Cosmological Constant From an Entropic Formulation of Gravity». En: *Int. J. Mod. Phys. D* 29.09, pág. 2050064. DOI: [10.1142/S0218271820500649](https://arxiv.org/abs/1806.04918). arXiv: [1806.04918](https://arxiv.org/abs/1806.04918) [gr-qc].
- d’Inverno, Ray (1998). *Introducing Einstein’s Relativity*. New York: Oxford University Press.
- EHT (2019). «First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole». En: *The Astrophysical Journal Letters* 875.1, 17 pp. URL: <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab0ec7>.
- Einstein, A. (1916). «Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie». En: *Annalen der physik* 354(7), 769–822. DOI: [10.1002/andp.19163540702](https://arxiv.org/abs/1916.03180).
- Einstein, Albert y col. (1905). «On the electrodynamics of moving bodies». En: *Annalen der physik* 17.10, págs. 891-921.
- Gaete, Patricio, José A. Helayél-Neto y Euro Spallucci (2010). «Un-graviton corrections to the Schwarzschild black hole». En: *Physics Letters B* 693.2, págs. 155-158. DOI: [10.1016/j.physletb.2010.07.058](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2010.07.058). URL: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2010.07.058>.
- Georgi, Howard (2007). «Unparticle Physics». En: *Physical Review Letters* 98.22. DOI: [10.1103/PhysRevLett.98.221601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.221601). URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.221601>.
- Goldberg, Haim y Pran Nath (2008). «Scalar Modifications to Gravity from Unparticle Effects May Be Testable». En: *Physical Review Letters* 100.3. DOI: [10.1103/PhysRevLett.100.031803](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.031803). URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.031803>.
- luisyp (2020). *El espectro electromagnético*. URL: <https://ingenieriabasica.es/espectro-electromagnetico/>.
- Nicolini, Piero (2010). «Entropic force, noncommutative gravity, and ungravity». En: *Physical Review D* 82.4. DOI: [10.1103/PhysRevD.82.044030](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.044030). URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.044030>.
- Novaes, S. F. (2000). «Standard Model: An Introduction.» En: DOI: [10.48550/ARXIV.HEP-PH/0001283](https://arxiv.org/abs/10.48550/ARXIV.HEP-PH/0001283).

- Peebles, P. J. E. y Bharat Ratra (2003). «The cosmological constant and dark energy». En: *Reviews of Modern Physics* 75.2, págs. 559-606. DOI: [10.1103/revmodphys.75.559](https://doi.org/10.1103/revmodphys.75.559). URL: <https://doi.org/10.1103/revmodphys.75.559>.
- Pound, R. V. y G. A. Rebka (1959). «Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance». En: *Phys. Rev. Lett.* 3 (9), págs. 439-441. DOI: [10.1103/PhysRevLett.3.439](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.3.439). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.3.439>.
- Riess, Adam G y col. (1998). «Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant». En: *The Astronomical Journal* 116.3, pág. 1009.
- Romero, Juan M. y J. David Vergara (2003). «The Kepler problem and noncommutativity». En: *Mod. Phys. Lett.* A18, págs. 1673-1680. DOI: [10.1142/S0217732303011472](https://doi.org/10.1142/S0217732303011472). arXiv: [hep-th/0303064](https://arxiv.org/abs/hep-th/0303064) [hep-th].
- Rubin, Vera C y W Kent Ford Jr (1970). «Rotation of the Andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions». En: *The Astrophysical Journal* 159, pág. 379.
- Salam, Abdus (1980). «Gauge unification of fundamental forces». En: *Rev. Mod. Phys.* 52 (3), págs. 525-538. DOI: [10.1103/RevModPhys.52.525](https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.52.525). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.52.525>.
- Swart, J. G. de, G. Bertone y J. van Dongen (2017). «How dark matter came to matter». En: *Nature Astronomy* 1.3. DOI: [10.1038/s41550-017-0059](https://doi.org/10.1038/s41550-017-0059). URL: <https://doi.org/10.1038/s41550-017-0059>.
- Thornton, Stephen T. y Jerry B. Marion (5ta ed.). *CLASSICAL DYNAMICS OF PARTICLES AND SYSTEMS*. USA: THOMPSON, BROOKS/COLE.
- Tomé, César (2014). *Del modelo estándar*. URL: <https://culturacientifica.com/2014/06/17/del-modelo-estandar/>.
- Verlinde, Erik (2011). «On the origin of gravity and the laws of Newton». En: *Journal of High Energy Physics* 2011.4. DOI: [10.1007/JHEP04\(2011\)029](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2011)029). URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP04\(2011\)029](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2011)029).
- Will, Clifford M (2015). «The 1919 measurement of the deflection of light». En: *Classical and Quantum Gravity* 32.12, pág. 124001. DOI: [10.1088/0264-9381/32/12/124001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/12/124001). URL: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/12/124001>.
- Wolfram Research, Inc. *Mathematica*. Champaign, IL, 2021. URL: <https://www.wolfram.com/mathematica>.



Asunto: Revisión de Tesis Maestría

León, Gto., a 6 de Mayo de 2022

**DR. DAVID DELEPINE
DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE
CIENCIAS E INGENIERÍAS
UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
PRESENTE:**

Por medio de la presente quiero responder a la solicitud de revisión del trabajo de tesis titulado *“Correcciones de Ungravity para las pruebas clásicas de relatividad General”*, realizado por Gemma Elizabeth Pérez Cuéllar.

Debido a que fungí como asesor de este trabajo, he revisado la progresión de dicho trabajo. El resultado más importante, fue establecer cotas para una formulación entrópica de la gravedad incluyendo términos de Ungravity. Dichas cotas se obtienen al analizar el corrimiento del perihelio de mercurio, desviación de la luz y corrimiento al rojo gravitacional. Cabe mencionar que de los resultados obtenidos se está escribiendo un artículo de investigación.

A mi juicio es un trabajo relevante en el que se estudia los efectos de una nueva formulación de la gravedad. Razón por la cual considero que es del nivel para obtener el grado de Maestro en Física, y que el trabajo está listo para la defensa pública.

Sin más por el momento

**ATENTAMENTE
“LA VERDAD OS HARÁ LIBRES”**

**Dr. Oscar Miguel Sabido Moreno
Profesor Titular B**

C.c.p. Archivo

DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO



León, Guanajuato, 5 de Mayo de 2022

Dr. David Delepine
Director
División de Ciencias e Ingenierías
PRESENTE

Por medio de la presente me permito informar que he leído la tesis titulada **“Correcciones de Ungravity a las pruebas clásicas de la Relatividad General”**, que para obtener el grado de Maestría en Física ha sido elaborada por la **Lic. Gemma Elizabeth Pérez Cuéllar**. En mi opinión, la tesis cumple con los requisitos de calidad correspondientes al grado académico al que se aspira. Las correcciones sugeridas por mi parte han sido atendidas, por lo cual recomiendo se proceda a la defensa de la tesis.

Atentamente

Dr. Carlos Alberto Vaquera Araujo
Catedrático Conacyt
Departamento de Física
DCI, Campus León
vaquera@fisica.ugto.mx



León Gto. a 28 de abril de 2022

Asunto: Carta de revisión de tesis de Gemma Elizabeth Pérez Cuéllar

Dr. David Delepine
Director de la División de Ciencias e Ingenierías, Campus León
Universidad de Guanajuato

PRESENTE

Estimado Dr. Delepine,

En mi calidad miembro del comité sinodal de la alumna de Maestría en Física Gemma Elizabeth Pérez Cuéllar (NUA: 312475), por este medio informo a usted que he revisado su tesis titulada "*Correcciones de Ungravity a las pruebas clásicas de Relatividad General*" que desarrolló Gemma con el fin de obtener el grado de Maestra en Física.

El trabajo de Gemma es muy completo y posee el contenido, originalidad y relevancia necesaria como trabajo de investigación. Gemma Elizabeth ha tomado en cuenta mis observaciones en la versión final de la tesis así que considero que dicho trabajo está listo para ser defendido públicamente.

Sin más por el momento, me despido con un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"

Dr. José Luis López Picón
Departamento de Física
División de Ciencias e Ingenierías, Campus León



SOMOS
ARTE, CIENCIA Y
DESARROLLO
CULTURAL



**UNIDAD ACADÉMICA
DE FÍSICA**

Zacatecas, Zacatecas a 26 de Abril de 2022

*Dr. David Y. Delepine
Director de la División de Ciencias e Ingenierías
Universidad de Guanajuato, Campus León*

PRESENTE

*Por medio de este conducto, le informo que, en relación con el trabajo de tesis titulado “Correcciones de Ungravity a las Pruebas Clásicas de Relatividad General”, realizado por la Ing. en Física, **Gemma Elizabeth Pérez Cuéllar**, bajo la supervisión del Dr. Oscar Miguel Sabido, con la finalidad de obtener el grado de Maestra en Física, he leído de manera atenta y detallada el mencionado trabajo, brindando correcciones y sugerencias a la autora que permitan mejorar la calidad del trabajo.*

Una vez dicho lo anterior, expreso mi conformidad con el trabajo presentado, considerándolo un trabajo de tesis bien realizado y con el rigor científico necesario y suficiente para obtener el grado de maestría en Física, por lo que, autorizo que la estudiante continúe con los trámites pertinentes para realizar la defensa pública de su trabajo lo antes posible.

Sin otro particular por el momento me despido de usted enviándole un fraternal saludo.

ATENTAMENTE

A. Isaac Díaz S.

Dr. Alberto Isaac Díaz Saldaña